

入学試験過去問題

数 学

東京都立大学（数理科学科）

対象年度：2009 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

第 1 問

3 点 $A(2, 1, 5)$, $B(1, -1, 3)$, $C(1, 1, 7)$ を通る平面を α とする。2 点 $D(0, 1, 2)$, $E(2, -5, 0)$ を通る直線と平面 α の交点を P とするとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) 2 つのベクトル $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ の両方に垂直な単位ベクトルのうち、 x 成分が正であるものを成分で表しなさい。
- (2) 点 P の座標を求めなさい。
- (3) 点 P を通り、平面 α に垂直な直線を h とする。直線 h と xy 平面の交点を Q とするとき、 PQ の長さを求めなさい。

第 2 問

以下の問いに答えなさい。

- (1) $3^x = a$, $12^y = a$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$ を満たす実数 x , y が存在するような a の値を求めなさい。

- (2) 正の実数 b , c , z が

$$\left(\log_2 \frac{z}{b}\right) \left(\log_2 \frac{z}{c}\right) + 1 = 0$$

を満たすとき, $\frac{c}{b}$ の取りうる値の範囲を求めなさい。

第 3 問

実数 a に対して定積分

$$f(a) = \int_0^1 e^x |x - a| dx$$

を考えると、以下の問いに答えなさい。

- (1) 定積分 $\int_0^1 e^x (x - a) dx$ を求めなさい。
- (2) $f(a)$ を求めなさい。
- (3) $f(a)$ を最小にする a の値を求めなさい。

第 4 問

自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し, n を 3 で割った余りを a_n で表す。数列 $\{b_n\}$ を漸化式

$$b_1 = 1, \quad b_{n+1} = b_n + (n+1)(a_{n+1})^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。以下の問いに答えなさい。

- (1) b_2 および b_3 の値を求めなさい。
- (2) すべての自然数 n に対し, $b_{3(n+1)} - b_{3n} = 15n + 9$ が成り立つことを示しなさい。
- (3) すべての自然数 k に対し,

$$b_{3k} = \frac{15(k-1)k}{2} + 9k$$

が成り立つことを示しなさい。

- (4) 自然数 n に対して「 b_n が 3 で割り切れない」ための必要十分条件は「 n を 3 で割った余りが 1」であることを示しなさい。

第 5 問

10 個の球の入った袋がある。おのおのの球には 1 から 10 までのどれかの数を書いてあり、どの 2 つの球にも異なる数を書いてある。このような袋が 3 袋あるとして、A, B, C とする。A, B, C から球を 1 個ずつ取り出し、取り出した球に書かれた数をそれぞれ a , b , c とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) a , b , c がすべて異なる確率を求めなさい。
- (2) a , b , c の最大値が 7 以下である確率を求めなさい。
- (3) a , b , c の最大値が 7 である確率を求めなさい。
- (4) $a + b + c = 10$ である確率を求めなさい。

第 6 問

$0 < a < 2$ に対して, 三角形 ABC は 3 辺が $AB = AC = 2$, $BC = 2a$ を満たすとする。
三角形 ABC の 3 辺に接する円 C_1 の半径を R_1 とするとき, 以下の問いに答えなさい。

- (1) R_1 を a についての式で表しなさい。
- (2) 三角形 ABC 内にある円 C_2 は, 円 C_1 に外接し, 2 辺 AB, BC に接するとする。
円 C_2 の半径を R_2 とするとき, $\frac{R_2}{R_1}$ を a についての式で表しなさい。