

入学試験過去問題

数 学

東京都立大学（数理科学科）

対象年度：2008 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

第 1 問

n を自然数とすると、1 から $2n$ までの相異なる自然数が 1 つずつ書かれた $2n$ 個の玉が袋の中に入っている。袋から 1 個の玉を取り出したときに書かれている数を a とする。この玉を袋に戻さずに、再び袋から 1 個の玉を取り出したときに書かれている数を b とするとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) $2a = b$ または $a = 2b$ となる確率を求めなさい。
- (2) $a \geq b$ となる確率を求めなさい。
- (3) $2a \geq b$ となる確率を求めなさい。

第 2 問

座標平面上に点 $A(1, 0)$ をとる。 $0 \leq t \leq 2\pi$ とするとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) 2 以上の自然数 n に対して、座標平面上に点 $P_k \left(\cos \frac{kt}{n}, \sin \frac{kt}{n} \right)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) をとるとき、三角形 AP_kP_n の面積 $S_k(t)$ を求めなさい。ただし、 A, P_k, P_n が三角形をつくらないときは $S_k(t) = 0$ とする。
- (2) 次の極限值を求めなさい。

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k(t)$$

- (3) 次の定積分の値を求めなさい。

$$I = \int_0^{2\pi} t f(t) dt$$

第 3 問

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を漸化式

$$a_1 = 3\sqrt{3}, \quad b_1 = 1$$

$$a_{n+1} = 4a_n + \sqrt{3}b_n, \quad b_{n+1} = \sqrt{3}a_n + 2b_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定めるとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) すべての自然数 n に対して、次の式を満たす行列 A を 1 つ求めなさい。

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

- (2) 数列 $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ を

$$c_n = \frac{1}{2}(\sqrt{3}a_n + b_n), \quad d_n = \frac{1}{2}(-a_n + \sqrt{3}b_n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定めるとき、すべての自然数 n に対して、次の式を満たす行列 B を 1 つ求めなさい。

$$\begin{pmatrix} c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix}$$

- (3) 数列 $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ の一般項 c_n , d_n を求めなさい。
(4) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項 a_n , b_n を求めなさい。

第 4 問

以下の問いに答えなさい。

- (1) $x + y = \pi$ を満たす実数 x, y に対して、次の等式が成り立つことを示しなさい。

$$\sin x + \sin y = 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2}$$

- (2) $x + y + z = \pi$ を満たす実数 x, y, z に対して、次の等式が成り立つことを示しなさい。

$$\sin x + \sin y + \sin z = 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2}$$

- (3) $x + y + z + w = \pi$ を満たす実数 x, y, z, w に対して、等式

$$\sin x + \sin y + \sin z + \sin w = 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2} \cos \frac{w}{2}$$

は必ずしも成り立たないことを示しなさい。

第 5 問

a, b を正の実数とすると、以下の問いに答えなさい。

- (1) 実数 t に対して、直線 $(ae^t)x + (be^{-t})y = 1$ に原点 O から下ろした垂線の長さ $f(t)$ を求めなさい。
- (2) 次の定積分の値を求めなさい。

$$I = \int_0^1 \frac{1}{f(t)^2} dt$$

- (3) a, b が条件 $ab = 1$ を満たしながら動くとき、定積分 I の最小値を求めなさい。

第 6 問

N 個の数列 $\{a_n^{(1)}\}, \dots, \{a_n^{(N)}\}$ はいずれも各項が 1 か -1 のいずれかであり, 次を満たすとする。

$$a_{n+1}^{(k)} = \begin{cases} a_n^{(k+1)} & (a_n^{(k)} = 1 \text{ のとき}) \\ a_n^{(k-1)} & (a_n^{(k)} = -1 \text{ のとき}) \end{cases} \quad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \dots, N \\ n = 1, 2, \dots \end{pmatrix}$$

ただし, $a_n^{(0)} = a_n^{(N)}$, $a_n^{(N+1)} = a_n^{(1)}$ と定める。 m を N 未満の自然数とすると, 以下の問いに答えなさい。

- (1) $a_1^{(1)} = a_1^{(2)} = \dots = a_1^{(m)} = 1$ ならば, $a_m^{(1)} = 1$ であることを示しなさい。
- (2) $a_1^{(1)} = a_1^{(2)} = \dots = a_1^{(m)} = 1$ かつ $a_1^{(m+1)} = -1$ ならば, $a_{m+1}^{(1)} = -1$ であることを示しなさい。
- (3) 自然数 n に対して, $a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \dots, a_n^{(N)}$ のうちで 1 であるものの個数を b_n とするとき, $b_{n+1} = b_n$ であることを示しなさい。