

入学試験過去問題

数 学

東京都立大学（数理科学科）

対象年度：2007 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

第 1 問

条件 $0 \leq a \leq 1$ をみたす実数 a に対して、連立不等式

$$\begin{cases} y \leq -|x| + a + 2 \\ y \geq |x| + a \\ y \leq 2 \end{cases}$$

の表す座標平面上の領域を $D(a)$ とするとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) 領域 $D\left(\frac{1}{2}\right)$ を図示しなさい。
- (2) 領域 $D(a)$ を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 $V(a)$ を求めなさい。
- (3) 条件 $0 \leq a \leq 1$ のもとで、体積 $V(a)$ が最大となるときの a の値を求めなさい。

第 2 問

いま n を自然数として、次の性質をもつ 2 つのルーレットがあるとする。ルーレット 1 をまわすと $0, 1, 2, \dots, 12n-1, 12n$ のいずれかの数が、それぞれ同じ確率 $\frac{1}{12n+1}$ で出る。ルーレット 2 をまわすと $3n, 6n$ のどちらかの数が、それぞれ同じ確率 $\frac{1}{2}$ で出る。さて 2 人の人物 A, B が、これらのルーレットを用いて次のようなゲームをする。まず A がルーレット 1 をまわし、出た数を a とする。次に B がルーレット 2 をまわし、出た数を b とする。もし $a \geq 2b$ ならば A の勝ち、もし $b \geq 2a$ ならば B の勝ち、それらのいずれでもなければ引き分けとする。このとき A が勝つ確率を p_n とし B が勝つ確率を q_n とし、以下の問いに答えなさい。答えのみでなく、理由も述べなさい。

- (1) 確率 p_1 および q_1 を、それぞれ求めなさい。
- (2) 確率 p_n および q_n を、それぞれ n を用いて表しなさい。
- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ および $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n$ を、それぞれ求めなさい。

第 3 問

以下の問いに答えなさい。

- (1) 実数 a, b, x, y に対して, 不等式

$$(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$$

が成り立つことを示しなさい。

- (2) 実数を成分とする 2 次の正方行列 A について, 次の 2 つの命題 (ア) と (イ) は同値であることを証明しなさい。

(ア) 行列 A は逆行列をもつ。

(イ) 条件 $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ をみたす実数 x, y は $x = y = 0$ に限る。

- (3) 実数 a, b, c, d が $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 < 1$ をみたすとき, 行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して, 行列 $E - A$ は逆行列をもつことを示しなさい。

第 4 問

関数 $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ に対して、以下の問いに答えなさい。

- (1) 関数 $f(x)$ の導関数は

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

であることを示しなさい。

- (2) 関数 $f(x)$ の第 2 次導関数を $f''(x)$ とおくと、

$$(x^2 + 1)f''(x) + xf'(x) = 0$$

が成り立つことを示しなさい。

- (3) 任意の自然数 n に対して、次の等式が成り立つことを、数学的帰納法によって証明しなさい。

$$(x^2 + 1)f^{(n+1)}(x) + (2n - 1)xf^{(n)}(x) + (n - 1)^2f^{(n-1)}(x) = 0$$

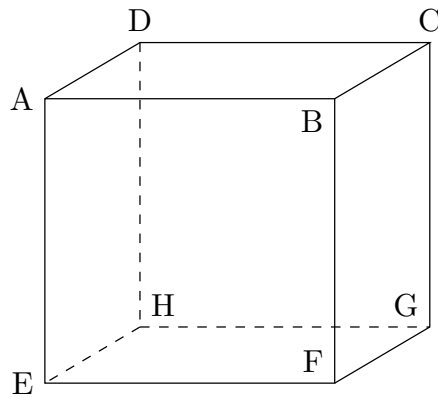
ただし $f^{(0)}(x) = f(x)$ とし、自然数 k に対して $f^{(k)}(x)$ は $f(x)$ の第 k 次導関数を表す。

- (4) 値 $f^{(9)}(0)$ および $f^{(10)}(0)$ を求めなさい。

第 5 問

図のような立方体を考える。辺 AE , AD の中点をそれぞれ P , Q とし、辺 DC を $DR : RC = 2 : 1$ に内分する点 R をとる。さらに $\vec{a} = \vec{EF}$, $\vec{b} = \vec{EH}$, $\vec{c} = \vec{EA}$ とおく。このとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) ベクトル $\vec{QP}$ および $\vec{QR}$ をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表しなさい。
- (2) 三角形 PQR において $\theta = \angle PQR$ として $\cos \theta$ の値を求めなさい。
- (3) この立方体の一辺の長さを 1 とする。点 P , Q , R を通る平面を X として、点 E と平面 X との距離 l の値を求めなさい。



第 6 問

座標平面上の点 (x, y) で x と y がともに整数であるものを格子点とよぶ。いま $n \geq 2$ である整数 n に対して、3つの条件

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < n^2 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

をみたす格子点 (x, y) の総数を $P(n)$ で表す。このとき、以下の問いに答えなさい。

(1) 不等式

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\sqrt{n^2 - k^2} - 1 \right) \leq P(n) < \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{n^2 - k^2}$$

が成り立つことを示しなさい。

(2) 等式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{n^2} = \frac{\pi}{4}$$

が成り立つことを示しなさい。