

前期

理系

2007 年度入学試験学力検査問題

数 学

〔 理学部：数理科学科 75 分 〕

答 案 用 紙 3 枚

注 意

1. 監督員の合図があるまで、問題の内容を見てはいけません。
2. 筆記用具のほか定規、コンパスの使用を認めます。
ただし、分度器の使用は認めません。
3. 受験番号及び氏名は、答案用紙の所定欄に必ず記入してください。

(例) 受験番号 1234567X の場合 →

		1	2	3
4	5	6	7	X

4. 解答には黒鉛筆またはシャープペンシルを使用し、必ず配付された答案用紙に記入してください。
答案用紙には、解答に関係のないことを記入してはいけません。
5. 試験中に不鮮明な印刷等に気付いた時は、手をあげて監督員に申し出てください。
6. 答案用紙を切り取ったり、持ち帰ったりしてはいけません。
7. 問題冊子の余白は利用可能ですが、どのページも切り離してはいけません。
8. 問題冊子は、持ち帰ってください。また、試験終了時刻まで退室できません。

1 関数 $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ に対して、以下の問いに答えなさい。

- (1) 関数 $f(x)$ の導関数は

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

であることを示しなさい。

- (2) 関数 $f(x)$ の第 2 次導関数を $f''(x)$ とおくと、

$$(x^2 + 1)f''(x) + xf'(x) = 0$$

が成り立つことを示しなさい。

- (3) 任意の自然数 n に対して、次の等式が成り立つことを、数学的帰納法によって証明しなさい。

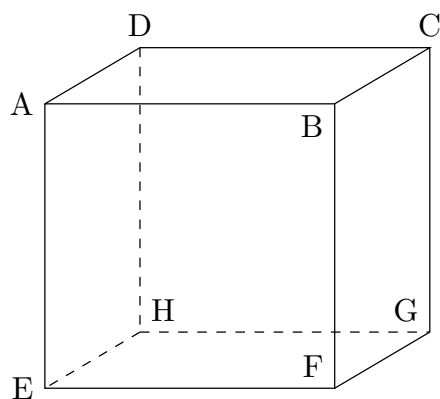
$$(x^2 + 1)f^{(n+1)}(x) + (2n - 1)xf^{(n)}(x) + (n - 1)^2f^{(n-1)}(x) = 0$$

ただし $f^{(0)}(x) = f(x)$ とし、自然数 k に対して $f^{(k)}(x)$ は $f(x)$ の第 k 次導関数を表す。

- (4) 値 $f^{(9)}(0)$ および $f^{(10)}(0)$ を求めなさい。

2 図のような立方体を考える。辺 AE, AD の中点をそれぞれ P, Q とし, 辺 DC を $DR : RC = 2 : 1$ に内分する点 R をとる。さらに $\vec{a} = \vec{EF}$, $\vec{b} = \vec{EH}$, $\vec{c} = \vec{EA}$ とおく。このとき, 以下の問いに答えなさい。

- (1) ベクトル $\vec{QP}$ および $\vec{QR}$ をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表しなさい。
- (2) 三角形 PQR において $\theta = \angle PQR$ として $\cos \theta$ の値を求めなさい。
- (3) この立方体の一辺の長さを 1 とする。点 P, Q, R を通る平面を X として, 点 E と平面 X との距離 l の値を求めなさい。



3 座標平面上の点 (x, y) で x と y がともに整数であるものを格子点とよぶ。いま $n \geq 2$ である整数 n に対して、3つの条件

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < n^2 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

をみたす格子点 (x, y) の総数を $P(n)$ で表す。このとき、以下の問いに答えなさい。

(1) 不等式

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\sqrt{n^2 - k^2} - 1 \right) \leq P(n) < \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{n^2 - k^2}$$

が成り立つことを示しなさい。

(2) 等式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{n^2} = \frac{\pi}{4}$$

が成り立つことを示しなさい。

