

入学試験過去問題

数 学

東京都立大学（数理科学科）

対象年度：2006 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

第 1 問

二分裂によって増える細胞がある。分裂してから 1 時間ごとに $\frac{1}{2}$ の確率で分裂するとする。すなわち、分裂しない場合は、そのまま存続し、1 時間後に $\frac{1}{2}$ の確率で分裂する。分裂した場合は、2 つの細胞になり、おのおのが 1 時間後に $\frac{1}{2}$ の確率で分裂する。

分裂した直後の細胞が時刻 0 時に 1 個あるとする。したがって、時刻 1 時に細胞が 1 個である確率は $\frac{1}{2}$ であり、2 個である確率も $\frac{1}{2}$ である。以下の問いに答えなさい。

- (1) 時刻 3 時の細胞の数が 3 である確率を求めなさい。
- (2) n を正の整数とする。時刻 n 時の細胞の数が 2 である確率を求めなさい。
- (3) 時刻 2 時の細胞の数の期待値を求めなさい。

第 2 問

関数 $y = -\frac{1}{x^2}$ ($x > 0$) のグラフを G とするとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) $y = x^2$ のグラフを平行移動した放物線で G 上に頂点をもち、原点を通るものを C_1 とするとき、 C_1 の方程式を求めなさい。
- (2) C_1 と x 軸の交点で原点と異なるものを P_1 とする。 $y = x^2$ のグラフを平行移動した放物線で G 上に頂点をもち、 C_1 と点 P_1 のみで交わるものを C_2 とし、 C_2 と x 軸の交点で P_1 と異なるものを P_2 とする。以下同様にして、 $y = x^2$ のグラフを平行移動した放物線で G 上に頂点を持ち、 C_{n-1} と点 P_{n-1} のみで交わるものを C_n とし、 C_n と x 軸の交点で P_{n-1} と異なるものを P_n とする。このとき、点 P_n の座標を求めなさい。
- (3) 放物線 C_n と x 軸で囲まれた図形の面積を S_n とするとき、極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^3} S_n$$

を求めなさい。

第 3 問

$(A - E)(A - 2E) = O$ を満たす行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

に対して、以下の問いに答えなさい。ここで、 a, b は実数、 E は単位行列、 O は零行列である。

(1) a, b を求めなさい。

(2) A の逆行列 B を求め、

$$B^2 + \alpha B + \beta E = O$$

を満たす実数 α, β を求めなさい。

(3) 実数 c に対して

$$(2 + 4c)B^4 - (5 + 4c)B^3 - cB^2 + (7 + c)B - 3E$$

を求めなさい。

第 4 問

3 次式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ に対し, 方程式 $f(x) = 0$ は相異なる 3 個の実数解 $-1, \alpha, \beta$ をもち, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ を満たすとする。以下の問いに答えなさい。

(1) a, b, c をそれぞれ α と β を用いて表しなさい。

(2) c を a を用いて表しなさい。

(3) $\int_{-1}^1 f(x) dx$ の値のとり得る範囲を求めなさい。

第 5 問

- (1) 自然数 n に対して, 次の不等式を証明しなさい。

$$n \log n - n + 1 \leq \log(n!) \leq (n+1) \log(n+1) - n$$

- (2) 次の極限の収束, 発散を調べ, 収束するときにはその極限値を求めなさい。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n!)}{n \log n - n}$$

第 6 問

n を 3 以上の整数とする。平面上に n 個のベクトル $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ があり、次の条件を満たすとする。

(a) $\vec{v}_1 = (1, 0), \vec{v}_2 = (0, 1)$ 。

(b) $k = 1, 2, \dots, n$ に対して、実数 a_k があって、

$$a_k \vec{v}_k = \vec{v_{k-1}} + \vec{v_{k+1}}$$

が成り立つ。ただし、 $\vec{v}_0 = \vec{v}_n, \vec{v_{n+1}} = \vec{v}_1$ とする。以下の問いに答えなさい。

(1) $n = 3$ のとき、 a_3 を求めなさい。

(2) $n = 4$ で $a_1 \neq 0$ のとき、 a_2, a_3, a_4 をそれぞれ a_1 を用いて表しなさい。

(3) $n = 4$ で $a_1 \neq 0$ のとき、 $k = 1, 2, 3, 4$ に対し、行列 A_k を

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a_k \end{pmatrix}$$

で定める。行列の積 $A_1 A_2 A_3 A_4$ を求めなさい。