

入学試験過去問題

数 学

東京都立大学（数理科学科）

対象年度：2005 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

第 1 問

$(z-3)^3$ が 0 または正の実数になるような複素数 z の全体の集合を T とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) T を図示せよ。
- (2) z が T 上を動くとき、 $|z|$ の最小値とそのときの z を求めよ。
- (3) z が T 上を動くとき、 $|z+1|+|z-1|$ の最小値とそのときの z を求めよ。

第 2 問

(1) 不定積分 $\int e^{-x} \sin(\pi x) dx$, $\int e^{-x} \cos(\pi x) dx$ をそれぞれ求めよ。

(2) n を整数として定積分 $\int_n^{n+1} e^{-x} |\sin(\pi x)| dx$ の値を求めよ。

(3) $a_n = \int_0^n e^{-x} |\sin(\pi x)| dx$ とする。 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

第 3 問

平面上に立てた旗を二つのサイコロ A, B を同時にふって次の規則にしたがって動かすゲームをする。サイコロをふる前の旗の座標を (x, y) としてサイコロをふって出た A, B の目の数をそれぞれ a, b とするとき、旗の位置を座標 $(x + a - 1, y + b - 1)$ に動かす。

最初の出発時には旗は $P(0) = (0, 0)$ にある。一回目のサイコロをふった後の旗の位置を $P(1)$ とする。以下同様にサイコロを n 回順次ふって、旗の位置が $P(0)$ から $P(1)$, $P(1)$ から $P(2)$, $\dots$, $P(n-1)$ から $P(n)$ へと順次動くとする。

- (1) $P(2) = (3, 4)$ となる確率を求めよ。
- (2) $P(5) = (24, 1)$ となる確率を求めよ。
- (3) $P(n) = (5n - 1, 5n - 3)$ となる確率を求めよ。

第 4 問

n, m は $2 \leq n \leq m$ を満たす自然数とする。平面上の四角形 ABCD で 2 辺 AD, BC は平行ではないものを考える。辺 AD を n 等分する点を $E_0 = A, E_1, \dots, E_{n-1}, E_n = D$ とし、辺 BC を m 等分する点を $F_0 = B, F_1, \dots, F_{m-1}, F_m = C$ とする。辺 AB, CD の中点をそれぞれ G, H とし、線分 $E_k F_k$ の中点を G_k ($k = 1, \dots, n$) とする。

- (1) ベクトル $\overrightarrow{GH}$ をベクトル $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$ を用いて表せ。
- (2) ベクトル $\overrightarrow{GG_k}$ ($k = 1, \dots, n$) をベクトル $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$ を用いて表せ。
- (3) 点 G, $G_1, \dots, G_n, H$ が同一直線上にあるとき, m, n の満たす条件を求めよ。

第 5 問

行列

$$B = \begin{pmatrix} 2 & s \\ 1 & t \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (s, t \text{ は実数})$$

を考える。 $B^2 = O$ を満たすとき、次の問いに答えよ。

- (1) s, t を決定せよ。
- (2) 実数 x, y に対して、 $(xE + yB)^2, (xE + yB)^3$ を求めよ。
- (3) 自然数 n に対して $(xE + yB)^n$ を求めよ。

第 6 問

点 P は直線上を次の条件 (i)～(iv) を満たして運動しているものとする。

- (i) 点 P の時刻 $t \geq 0$ における速度は 6 次の多項式 $f(t)$ で与えられる。
- (ii) どんな $t \geq 0$ に対しても $f(t) \geq 0$ である。
- (iii) $t = 0, 3, 6$ で P の速度は 0 となる。さらに $t = 0$ では $f'(0) = 0$ である。
- (iv) $0 \leq t \leq 6$ における最高速度は 108 である。

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $f(t)$ を求めよ。
- (2) $0 \leq t \leq 3$ に P が進んだ距離と $3 \leq t \leq 6$ に P が進んだ距離が等しくなることを示せ。