

入学試験過去問題

数 学

東京都立大学（文系）

対象年度：2023 年

試験時間：90 分

問題数：4 問

第 1 問

三角形の 3 つの頂点からそれぞれの対辺またはその延長に下ろした 3 本の垂線の交点を, この三角形の垂心という。△OAB の垂心と内心をそれぞれ H と I で表し, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおく。

$$|\vec{a}| = 2, \quad |\vec{b}| = 3, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{3}{2}$$

が成り立つとき, 以下の問いに答えなさい。

- (1) ベクトル $\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表しなさい。
- (2) ベクトル $\overrightarrow{OI}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表しなさい。

第 2 問

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

以下の問いに答えなさい。

- (1) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_{n+1} - 3a_n$ と定める。 $\{b_n\}$ の一般項を求めなさい。
- (2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい。

第 3 問

実数 t が $0 < t < 1$ をみたすとする。座標平面上の 3 点 $O(0, 0)$, $A(\sqrt{t}, t)$, $B(0, -t+1)$ を考える。以下の問いに答えなさい。

- (1) $OC = AC = BC$ となる点 C の座標を t を用いて表しなさい。
- (2) 3 点 O , A , B を通る円の面積 $S(t)$ を求めなさい。
- (3) 実数 t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき, $S(t)$ の最小値を求めなさい。また, そのときの t の値を求めなさい。

第 4 問

座標平面上の点 $A_n(x_n, y_n)$ ($n = 0, 1, 2, 3, 4$) を以下のように定める。 A_0 は原点 $O(0, 0)$ とする。 A_n (ただし $n < 4$) が決まったとき, さいころを投げて出た目を k とし,

$$x_{n+1} = x_n + \cos \frac{k\pi}{3}, \quad y_{n+1} = y_n + \sin \frac{k\pi}{3}$$

として $A_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$ を決める。以下の問いに答えなさい。

- (1) 座標平面上の点のうち, A_1 または A_2 または A_3 として選ばれる可能性のある点の個数を求めなさい。
- (2) A_2 が原点 O と一致する確率を求めなさい。
- (3) A_2 が原点 O を中心とする半径 1 の円周上にある確率を求めなさい。
- (4) A_3 が原点 O と一致する確率を求めなさい。
- (5) A_4 が原点 O と一致する確率を求めなさい。