

入学試験過去問題

数 学

東京都立大学（文系）

対象年度：2021 年

試験時間：90 分

問題数：4 問

第 1 問

k を $-1 < k < 3$ をみたす実数とする。放物線 $y = x^2$ と直線 $y = 2x + k$ の交点を P_1 , P_2 とする。点 P_1 , P_2 から x 軸に下ろした垂線と x 軸の交点をそれぞれ Q_1 , Q_2 とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) 線分 Q_1Q_2 の長さを k を用いて表しなさい。
- (2) 3 点 P_1 , P_2 , $P(1, 5)$ を頂点とする三角形の面積 $S(k)$ を求めなさい。
- (3) $\{S(k)\}^2$ が最大となる k の値を求めなさい。

第 2 問

平面上に $AB = 3$, $BC = 7$, $CA = 6$ となる $\triangle ABC$ を考える。 $\angle BAC$ の 2 等分線と辺 BC の交点を P とする。 t を $0 < t < 1$ をみたす実数とし、辺 AB を $t : (1 - t)$ に内分する点を Q とする。線分 AP と線分 CQ の交点を R とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) $\cos \angle BAC$ を求めなさい。
- (2) $\triangle ABC$ の面積を求めなさい。
- (3) $\triangle APC$ の面積を求めなさい。
- (4) $\triangle AQR$ の面積と $\triangle RPC$ の面積の比が $3 : 2$ となる t の値を求めなさい。

第 3 問

θ を $0 \leq \theta < 2\pi$ をみたす実数とし,

$$f(x) = (x - \sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta) \left(x^2 - (2 \sin \theta)x - 2 \cos^2 \theta - \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{4} + 1 \right)$$

とおく。以下の問いに答えなさい。

- (1) 方程式 $f(x) = 0$ が実数解と虚数解の両方を持つ θ の範囲を求めなさい。
- (2) θ が (1) で求めた範囲を動くとき、方程式 $f(x) = 0$ の実数解 α のとりうる値の範囲を求めなさい。

第 4 問

以下の問いに答えなさい。

- (1) n を自然数とする。 2^{3n} を 7 で割ったときの余りが 1 であることを数学的帰納法を用いて示しなさい。
- (2) s を自然数とする。初項 2^{49} ，公比 $\frac{s^2}{2}$ の等比数列を $\{a_n\}$ とするとき，

$$(s^2 - 2) \sum_{n=1}^{50} a_n$$

を求めなさい。

- (3) 3^{100} を 7 で割ったときの余りを求めなさい。