

入学試験過去問題

数 学

東京都立大学（文系）

対象年度：2020 年

試験時間：90 分

問題数：4 問

第 1 問

a を実数とする。関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{1}{4} \left(\log_{\frac{1}{2}} x^2 \right)^2 - \log_{\frac{1}{2}} (8x^{1-a}) + a - 8 \quad (1 \leq x \leq 4)$$

と定める。 $t = \log_{\frac{1}{2}} x$ とおくとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) $f(x)$ を t を用いて表しなさい。
- (2) $1 \leq x \leq 4$ のとき、 t の値の範囲を求めなさい。
- (3) 次の条件 (*) をみたす a の値の範囲を求めなさい。
(*) $1 \leq x \leq 4$ のとき、 $f(x) < 0$ である。

第 2 問

次の条件によって定まる数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ について考える。

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad y_1 = 0, \quad \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n - 2y_n \\ y_{n+1} = 2x_n - y_n \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

以下の問いに答えなさい。

- (1) $x_n - y_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を求めなさい。
- (2) 数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ の一般項を求めなさい。
- (3) 座標平面上の点 $\left(\frac{19}{2}, 19\right)$ を中心とする半径 $2\sqrt{17}$ の円の内部を U とする。ただし, U は境界線を含まないとする。点 (x_n, y_n) が U に含まれるような自然数 n をすべて求めなさい。

第 3 問

$f(x) = \frac{1}{2}|x^2 + 2x - 3| + x - \frac{3}{2}$ と定めるとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) 関数 $y = f(x)$ のグラフをかきなさい。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = k(x + 3) - \frac{5}{2}$ の共有点の個数は、定数 k の値によってどのように変わるか調べなさい。

第 4 問

関数 $f(x) = 2ax - x^2$ ($a > \frac{1}{2}$) に対し、原点 O における曲線 $y = f(x)$ の接線を l とする。 t を実数とし、点 $(t, f(t))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線を m とする。2 つの接線 l と m が直交しているとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) t を a を用いて表しなさい。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ と接線 m と 2 直線 $x = 0$, $x = 2a$ で囲まれた図形の面積 $S(a)$ を求めなさい。
- (3) $a > \frac{1}{2}$ のとき、 $\frac{S(a)}{a}$ の最小値を求めなさい。また、そのときの a の値を求めなさい。