

入学試験過去問題

数 学

東京都立大学（文系）

対象年度：2019 年

試験時間：90 分

問題数：4 問

第 1 問

a を実数とし, xy 平面上の曲線 $y = (x - a)^2 - a$ と $y = -x^2$ をそれぞれ C_1 と C_2 とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) C_1 と C_2 が 2 つの異なる交点をもつとき, a のとり得る値の範囲を求めなさい。
- (2) α と β を実数とする。次の等式が成り立つことを示しなさい。

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$

- (3) a は (1) で求めた範囲を動くとする。 C_1 と C_2 によって囲まれた図形の面積を $S(a)$ で表す。 $S(a)$ が最大になる a の値と, そのときの $S(a)$ の値を求めなさい。

第 2 問

θ を $0 \leq \theta \leq 2\pi$ をみたす実数として,

$$f(\theta) = \sqrt{3} \sin 2\theta - \cos 2\theta - 2\sqrt{6} \sin \theta - 2\sqrt{2} \cos \theta$$

とする。 $x = \sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta$ とおく。以下の問いに答えなさい。

- (1) x を $r \sin(\theta + \alpha)$ の形に表しなさい。ただし, α は実数, r は正の実数とする。
- (2) $f(\theta)$ を x の式で表しなさい。
- (3) $f(\theta)$ の最大値と最小値, およびそのときの θ の値を求めなさい。

第 3 問

1 から 6 の目が出る確率が等しいさいころが 1 個ある。A, B の 2 人がそれぞれ 1 回さいころを投げ、出た目をそれぞれ a, b とする。 $a \leq b$ のときは、 b を a で割った余りを A の得点とし、B の得点は -1 とする。 $a > b$ のときは、 a を b で割った余りを B の得点とし、A の得点は -1 とする。A, B の得点をそれぞれ r, s とする。以下の問いに答えなさい。

- (1) $r = 0$ となる確率を求めなさい。
- (2) 積 rs が 0 となる確率を求めなさい。
- (3) 1 以上 6 以下の整数 n であって「 $r = n$ となる確率が正」となるもののうち、最大のものを求めなさい。

第 4 問

n を 2 以上の自然数とする。 n の正の約数のうち、 n 以外のものをすべて並べる。それらの総和が n であるとき、 n を完全数という。例えば、6 の正の約数のうち、6 以外のは 1, 2, 3 であり、それらの総和は $1 + 2 + 3 = 6$ である。したがって、6 は完全数である。以下の問いに答えなさい。

- (1) 496 は完全数であることを示しなさい。
- (2) m を 2 以上の自然数とする。 $2^m - 1$ が素数であれば、 $2^{m-1}(2^m - 1)$ は完全数であることを示しなさい。