前期 **文系**

2019年度入学試験学力検査問題

数　　学

［ 文系学部　　90分 ］

答案用紙　2**枚**

注　意

1. 監督員の合図があるまで，問題の内容を見てはいけません。
2. 筆記用具のほか定規，コンパスの使用を認めます。
   ただし，分度器の使用は認めません。
3. 受験番号及び氏名は，答案用紙の所定欄に必ず記入してください。

（例）　受験番号　1234567X　の場合　⟶

		1	2	3
4	5	6	7	X

4. 解答には黒鉛筆またはシャープペンシルを使用し，必ず配付された答案用紙に記入してください。
   答案用紙には，解答に関係のないことを記入してはいけません。
5. 試験中に不鮮明な印刷等に気付いた時は，手をあげて監督員に申し出てください。
6. 答案用紙を切り取ったり，持ち帰ったりしてはいけません。
7. 問題冊子の余白は利用可能ですが，どのページも切り離してはいけません。
8. 問題冊子は，持ち帰ってください。また，試験終了時刻まで退室できません。

$\boxed{1}$ a を実数とし，xy 平面上の曲線 $y=(x-a)^2-a$ と $y=-x^2$ をそれぞれ C_1 と C_2 とする。以下の問いに答えなさい。

(1) C_1 と C_2 が 2 つの異なる交点をもつとき，a のとり得る値の範囲を求めなさい。

(2) α と β を実数とする。次の等式が成り立つことを示しなさい。

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

(3) a は (1) で求めた範囲を動くとする。C_1 と C_2 によって囲まれた図形の面積を $S(a)$ で表す。$S(a)$ が最大になる a の値と，そのときの $S(a)$ の値を求めなさい。

$\boxed{2}$ θ を $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ をみたす実数として，

$$f(\theta)=\sqrt{3}\sin 2\theta-\cos 2\theta-2\sqrt{6}\sin\theta-2\sqrt{2}\cos\theta$$

とする。$x=\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$ とおく。以下の問いに答えなさい。

(1) x を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に表しなさい。ただし，α は実数，r は正の実数とする。

(2) $f(\theta)$ を x の式で表しなさい。

(3) $f(\theta)$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めなさい。

3 1から6の目が出る確率が等しいさいころが1個ある。A，Bの2人がそれぞれ1回さいころを投げ，出た目をそれぞれa，bとする。$a \leqq b$のときは，bをaで割った余りをAの得点とし，Bの得点は-1とする。$a > b$のときは，aをbで割った余りをBの得点とし，Aの得点は-1とする。A，Bの得点をそれぞれr，sとする。以下の問いに答えなさい。

(1) $r = 0$となる確率を求めなさい。

(2) 積rsが0となる確率を求めなさい。

(3) 1以上6以下の整数nであって「$r = n$となる確率が正」となるもののうち，最大のものを求めなさい。

4 nを2以上の自然数とする。nの正の約数のうち，n以外のものをすべて並べる。それらの総和がnであるとき，nを完全数という。例えば，6の正の約数のうち，6以外のものは1, 2, 3であり，それらの総和は$1 + 2 + 3 = 6$である。したがって，6は完全数である。以下の問いに答えなさい。

(1) 496は完全数であることを示しなさい。

(2) mを2以上の自然数とする。$2^m - 1$が素数であれば，$2^{m-1}(2^m - 1)$は完全数であることを示しなさい。