

入学試験過去問題

数 学

東京都立大学（文系）

対象年度：2016 年

試験時間：90 分

問題数：4 問

第 1 問

以下の問いに答えなさい。

- (1) 次の式を展開しなさい。

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

- (2) a, b, c を 0 以上の実数とする。次の不等式が成り立つことを示しなさい。また、等号が成り立つのはどのようなときか答えなさい。

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

第 2 問

数直線上に 2 点 $Q(-1)$ と $P_1\left(\frac{1}{2}\right)$ をとり、線分 QP_1 を $3:1$ に外分する点を P_2 、線分 QP_2 を $3:1$ に外分する点を P_3 とする。以下同様に $n = 1, 2, \dots$ に対し線分 QP_n を $3:1$ に外分する点を P_{n+1} とする。また P_n の座標を a_n とする。このとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) A を数直線上の Q と異なる点とする。線分 QA を $3:1$ に外分する点が P_1 であるとき、 A の座標 a を求めなさい。

- (2) すべての自然数 n に対して

$$a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1$$

が成り立つことを n に関する数学的帰納法で証明しなさい。

- (3) $999 < a_n < 9999$ をみたす自然数 n をすべて求めなさい。ただし、本問では $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

第 3 問

大小 2 つのサイコロを投げて出る目の値をそれぞれ p, q とし, 6 以下の自然数 n のうち条件

$$(n - p)(n - q) < 0$$

をみたすものすべてをホワイトボードに書くものとする。以下の問いに答えなさい。

- (1) ホワイトボードに 2 だけが書かれる確率を求めなさい。
- (2) ホワイトボードに何も書かれない確率を求めなさい。
- (3) ホワイトボードに書かれる自然数全体の集合を A とする。ただし, 何も書かれないとき A は空集合とする。6 以下の素数全体の集合を B とするとき, A が B の部分集合となる確率を求めなさい。

第 4 問

θ は $0 \leq \theta < 2\pi$ をみたす実数とする。

$$f(x) = x^2 - (2 \cos \theta)x - \sin^2 \theta + \sin \theta + \frac{1}{2}$$

とおくとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) 放物線 $y = f(x)$ の頂点の座標を求めなさい。
- (2) 方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつような θ の範囲を求めなさい。
- (3) θ が (2) で求めた範囲を動くとき、放物線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれる図形の面積を $S(\theta)$ とする。 $S(\theta)$ を最大にする θ の値と、 $S(\theta)$ の最大値を求めなさい。