

前期

文系

2016 年度入学試験学力検査問題

数 学

〔 文系学部 90 分 〕

答 案 用 紙 2 枚

注 意

1. 監督員の合図があるまで、問題の内容を見てはいけません。
2. 筆記用具のほか定規，コンパスの使用を認めます。
ただし，分度器の使用は認めません。
3. 受験番号及び氏名は，答案用紙の所定欄に必ず記入してください。

(例) 受験番号 1234567X の場合 →

		1	2	3
4	5	6	7	X

4. 解答には黒鉛筆またはシャープペンシルを使用し，必ず配付された答案用紙に記入してください。
答案用紙には，解答に関係のないことを記入してはいけません。
5. 試験中に不鮮明な印刷等に気付いた時は，手をあげて監督員に申し出てください。
6. 答案用紙を切り取ったり，持ち帰ったりしてはいけません。
7. 問題冊子の余白は利用可能ですが，どのページも切り離してはいけません。
8. 問題冊子は，持ち帰ってください。また，試験終了時刻まで退室できません。

1 以下の問いに答えなさい。

(1) 次の式を展開しなさい。

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

(2) a, b, c を 0 以上の実数とする。次の不等式が成り立つことを示しなさい。また、等号が成り立つのはどのようなときか答えなさい。

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

2 数直線上に 2 点 $Q(-1)$ と $P_1\left(\frac{1}{2}\right)$ をとり、線分 QP_1 を $3:1$ に外分する点を P_2 、線分 QP_2 を $3:1$ に外分する点を P_3 とする。以下同様に $n = 1, 2, \dots$ に対し線分 QP_n を $3:1$ に外分する点を P_{n+1} とする。また P_n の座標を a_n とする。このとき、以下の問いに答えなさい。

(1) A を数直線上の Q と異なる点とする。線分 QA を $3:1$ に外分する点が P_1 であるとき、 A の座標 a を求めなさい。

(2) すべての自然数 n に対して

$$a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1$$

が成り立つことを n に関する数学的帰納法で証明しなさい。

(3) $999 < a_n < 9999$ をみたす自然数 n をすべて求めなさい。ただし、本問では $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

- 3 大小2つのサイコロを投げて出る目の値をそれぞれ p, q とし、6以下の自然数 n のうち条件

$$(n-p)(n-q) < 0$$

をみたすものすべてをホワイトボードに書くものとする。以下の問いに答えなさい。

- (1) ホワイトボードに2だけが書かれる確率を求めなさい。
- (2) ホワイトボードに何も書かれない確率を求めなさい。
- (3) ホワイトボードに書かれる自然数全体の集合を A とする。ただし、何も書かれないとき A は空集合とする。6以下の素数全体の集合を B とするとき、 A が B の部分集合となる確率を求めなさい。

- 4 θ は $0 \leq \theta < 2\pi$ をみたす実数とする。

$$f(x) = x^2 - (2 \cos \theta)x - \sin^2 \theta + \sin \theta + \frac{1}{2}$$

とおくとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) 放物線 $y = f(x)$ の頂点の座標を求めなさい。
- (2) 方程式 $f(x) = 0$ が異なる2つの実数解をもつような θ の範囲を求めなさい。
- (3) θ が(2)で求めた範囲を動くとき、放物線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれる図形の面積を $S(\theta)$ とする。 $S(\theta)$ を最大にする θ の値と、 $S(\theta)$ の最大値を求めなさい。

