

入学試験過去問題

数 学

東京都立大学（文系）

対象年度：2011 年

試験時間：90 分

問題数：4 問

第 1 問

k を実数とし、曲線 $C_1 : y = 1 - x^2$ と曲線 $C_2 : y = x^2 - 2kx + k^2$ が異なる 2 点 P , Q で交わるとする。以下の問いに答えなさい。

- (1) k のとり得る値の範囲を求めなさい。
- (2) k の値が変化するとき、線分 PQ の中点 R の軌跡を図示しなさい。
- (3) (2) の軌跡と C_1 で囲まれた図形の面積を求めなさい。

第 2 問

関数 $y = 8^x - 3 \cdot 2^x$ について、以下の問いに答えなさい。

- (1) y の値が 0 となる x の値を求めなさい。
- (2) y の最小値と、 y の最小値を与える x の値を求めなさい。

第 3 問

原点を O とする座標平面上に点 $A(3, 0)$ を中心とし半径が r_1 の円 C_1 と、点 $B(1, 0)$ を中心とし半径が r_2 の円 C_2 がある。 C_1 上に y 座標が正である点 P_1 をとり、 $\angle OAP_1 = \theta$ とする。 C_2 上に y 座標が負である点 P_2 を、ベクトル $\overrightarrow{AP_1}$ と $\overrightarrow{BP_2}$ が平行であるようにとるとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) P_1, P_2 の座標を r_1, r_2, θ でそれぞれ表しなさい。
- (2) $r_1 + r_2 < 2$ とする。 P_1, P_2 を通る直線が C_1 と C_2 の両方に接するとき、 $\cos \theta$ を求めなさい。
- (3) (2) の条件のもとで $\triangle OP_1P_2$ の面積を r_1, r_2 で表しなさい。

第 4 問

数列 $\{a_n\}$ が次の式によって与えられているとする。

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

このとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) $n = 1, 2, 3, 4$ に対して、それぞれ $2(n+1)a_n$ の値を求めなさい。
- (2) a_n の一般項を推定し、推定した式がすべての自然数 n に対して正しいことを数学的帰納法を用いて証明しなさい。
- (3) $a_n > \frac{1}{2} + \frac{100}{n^2}$ をみたす最小の n を求めなさい。