

入学試験過去問題

数 学

東京都立大学（文系）

対象年度：2010 年

試験時間：90 分

問題数：4 問

第 1 問

3 個のさいころを同時に投げる試行において、出る目の和を S とする。このとき、以下の問いに答えなさい。答えのみでなく、理由も述べなさい。

- (1) $S = 7$ となる確率を求めなさい。
- (2) $S \geq 7$ となる確率を求めなさい。
- (3) $S \leq 5$ または $S \geq 16$ なら 3000 円, $6 \leq S \leq 15$ なら 300 円の賞金が得られるものとする。このとき、得られる賞金額の期待値を求めなさい。

第 2 問

原点を O とする座標平面上のベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ は $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{17}$, $|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{10}$ を満たし, $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角 θ が $\cos \theta = -\frac{13}{\sqrt{170}}$ を満たしている。ベクトル $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ を $\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$, $\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}}{2}$ で定める。このとき, 以下の問いに答えなさい。

- (1) 長さ $|\overrightarrow{u}|$, $|\overrightarrow{v}|$ と内積 $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ を求めなさい。
- (2) 実数 t に対して $\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{u} + (1-t)\overrightarrow{v}$ とおく。長さ $|\overrightarrow{OP}|$ を最小にする t の値を求めなさい。また, そのときの長さ $|\overrightarrow{OP}|$ を求めなさい。

第 3 問

実数 a, b, c, d に対し x の 3 次の整式 $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ を考える。ただし, $ad \neq 0$ とする。方程式 $P(x) = 0$ の 3 つの解を α, β, γ とすると $P(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ であることが知られている。このとき, 以下の問いに答えなさい。

- (1) 積 $\alpha\beta\gamma$, 和 $\alpha + \beta + \gamma$, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$ を, それぞれ a, b, c, d を用いて表しなさい。
- (2) もし α が実数でないならば, 方程式 $P(x) = 0$ は α の共役な複素数 $\bar{\alpha}$ を解に持つことを証明しなさい。
- (3) 解 α, β, γ のうち実数となるものの個数は 0, 1, 2, 3 のどれか, 考えられる可能性をすべて, 理由も述べて答えなさい。
- (4) もし $ad > 0$ ならば, 解 α, β, γ のうち正の実数となるものの個数は 0, 1, 2, 3 のどれか, 考えられる可能性をすべて, 理由も述べて答えなさい。

第 4 問

実数 a が $\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}$ を動くとき,

$$S(a) = \int_a^{a+1} |(3x-4)(x-4)| dx$$

を最小にする a の値を求めなさい。