

入学試験過去問題
数 学

東北大学（理系）

対象年度：2026年

試験時間：150分

問題数：6問

第 1 問

座標平面上的放物線 $y = x^2$ を C とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 正の実数 u に対し、放物線 C の接線で点 $(u, u - 1)$ を通るものがちょうど 2 本あることを示せ。
- (2) 正の実数 u に対し、放物線 C の相異なる 2 本の接線で点 $(u, u - 1)$ を通るものを l_1, l_2 とする。放物線 C と直線 l_1 の接点を P_1 とし、放物線 C と直線 l_2 の接点を P_2 とする。このとき、線分 P_1P_2 の垂直二等分線 m は y 軸と交わることを示せ。また、 u が正の実数全体を動くとき、直線 m と y 軸の交点の y 座標 $q(u)$ の最小値と、それを与える u の値を求めよ。

第 2 問

以下の問いに答えよ。

- (1) $a^2 + 2b^2 = c^2$ を満たす正の整数の組 (a, b, c) を 1 つ求めよ。なお、解答は答えのみでよい。
- (2) $a^2 + 2b^2 = c^2$ を満たす正の整数の組 (a, b, c) は無数に存在することを示せ。
- (3) 正の整数の組 (a, b, c) は $a^2 + 2b^2 = c^2$ を満たすとする。このとき、 $a + c$ および b は偶数であることを示せ。さらに、もし a と c が偶数ならば b は 4 の倍数であることを示せ。

第 3 問

a, b, c, d は実数とし、実数全体を定義域とする関数

$$f(x) = \begin{cases} 8x^3 - 6x^2 + 2 & (|x| \leq 1 \text{ のとき}) \\ 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d & (|x| > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

はすべての x の値で微分可能であるとする。以下の問いに答えよ。

- (1) a, b, c, d の値を求めよ。
- (2) 関数 $f(x)$ の最小値と、それを与える x の値を求めよ。

第 4 問

座標平面において、 x 座標も y 座標も整数である点全体の集合上を移動する点 P がある。時刻 0 に点 P は原点 O にある。0 以上の整数 t に対し、時刻 t に点 P が点 (m, n) にあるとき、時刻 $t+1$ での点 P の位置は 4 点

$$(m+1, n), (m-1, n), (m, n+1), (m, n-1)$$

のいずれかであり、また、どの位置にある確率も $\frac{1}{4}$ である。以下の問いに答えよ。

- (1) 時刻 8 に点 P が点 $(4, 0)$ にある確率を求めよ。
- (2) 時刻 8 に点 P が双曲線 $x^2 - y^2 = 16$ 上にある確率を求めよ。
- (3) 時刻 8 に点 P が双曲線 $x^2 - y^2 = 16$ 上にあるとき、時刻 1, 時刻 2, \dots , 時刻 7 のいずれかに点 P が点 $(4, 2)$ にある条件付き確率を求めよ。

第 5 問

座標平面上の曲線 C は、媒介変数 t を用いて

$$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

と表されている。曲線 C の y 軸に平行な接線を l とし、曲線 C 、直線 l および x 軸で囲まれる図形を D とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 直線 l の方程式を求めよ。
- (2) 正の実数 α, β に対し、次の 2 つの不定積分を求めよ。

$$I = \int e^{\alpha t} \cos \beta t \, dt, \quad J = \int e^{\alpha t} \sin \beta t \, dt$$

- (3) D を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V の値を求めよ。

第 6 問

A, B, C, D, O, P, Q は空間内の 7 点である。そのうち 6 点 A, B, C, D, O, P は相異なり, 5 点 A, B, C, D, P はある球面 S 上にある。また, 点 Q は直線 CD 上にある。さらに, ある実数 a, b に対し, 次が成り立つとする。

$$\overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OQ} = b\overrightarrow{OB}, \quad a|\overrightarrow{OA}|^2 = b|\overrightarrow{OB}|^2$$

以下の問いに答えよ。

- (1) 点 Q は 3 点 A, B, P が定める平面 α 上にあることを示せ。
- (2) 点 Q は点 C または点 D に等しいことを示せ。