入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

東北大学（理系）

対象年度： 2026 年

試験時間： 150 分

問題数： 6 問

――――このページは白紙――――

———このページは白紙———

$\boxed{1}$ 座標平面上の放物線 $y = x^2$ を C とする。以下の問いに答えよ。

(1) 正の実数 u に対し，放物線 C の接線で点 $(u,\ u-1)$ を通るものがちょうど 2 本あることを示せ。

(2) 正の実数 u に対し，放物線 C の相異なる 2 本の接線で点 $(u,\ u-1)$ を通るものを ℓ_1, ℓ_2 とする。放物線 C と直線 ℓ_1 の接点を P_1 とし，放物線 C と直線 ℓ_2 の接点を P_2 とする。このとき，線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の垂直二等分線 m は y 軸と交わることを示せ。また，u が正の実数全体を動くとき，直線 m と y 軸の交点の y 座標 $q(u)$ の最小値と，それを与える u の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 以下の問いに答えよ。

(1) $a^2 + 2b^2 = c^2$ を満たす正の整数の組 $(a,\ b,\ c)$ を 1 つ求めよ。なお，解答は答えのみでよい。

(2) $a^2 + 2b^2 = c^2$ を満たす正の整数の組 $(a,\ b,\ c)$ は無数に存在することを示せ。

(3) 正の整数の組 $(a,\ b,\ c)$ は $a^2 + 2b^2 = c^2$ を満たすとする。このとき，$a + c$ および b は偶数であることを示せ。さらに，もし a と c が偶数ならば b は 4 の倍数であることを示せ。

$\boxed{3}$ $a,\ b,\ c,\ d$ は実数とし，実数全体を定義域とする関数

$$f(x)=\begin{cases} 8x^3-6x^2+2 & (|\,x\,|\leqq 1\ のとき) \\ 3x^4+ax^3+bx^2+cx+d & (|\,x\,|>1\ のとき) \end{cases}$$

はすべての x の値で微分可能であるとする。以下の問いに答えよ。

(1) $a,\ b,\ c,\ d$ の値を求めよ。

(2) 関数 $f(x)$ の最小値と，それを与える x の値を求めよ。

$\boxed{4}$ 座標平面において，x 座標も y 座標も整数である点全体の集合上を移動する点 P がある。時刻 0 に点 P は原点 O にある。0 以上の整数 t に対し，時刻 t に点 P が点 $(m,\ n)$ にあるとき，時刻 $t+1$ での点 P の位置は 4 点

$$(m+1,\ n),\quad (m-1,\ n),\quad (m,\ n+1),\quad (m,\ n-1)$$

のいずれかであり，また，どの位置にある確率も $\dfrac{1}{4}$ である。以下の問いに答えよ。

(1) 時刻 8 に点 P が点 $(4,\ 0)$ にある確率を求めよ。

(2) 時刻 8 に点 P が双曲線 $x^2-y^2=16$ 上にある確率を求めよ。

(3) 時刻 8 に点 P が双曲線 $x^2-y^2=16$ 上にあるとき，時刻 1，時刻 2，$\cdots$，時刻 7 のいずれかに点 P が点 $(4,\ 2)$ にある条件付き確率を求めよ。

$\boxed{5}$ 座標平面上の曲線 C は，媒介変数 t を用いて

$$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t \qquad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

と表されている。曲線 C の y 軸に平行な接線を ℓ とし，曲線 C，直線 ℓ および x 軸で囲まれる図形を D とする。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) 正の実数 α, β に対し，次の 2 つの不定積分を求めよ。

$$I = \int e^{\alpha t} \cos \beta t \, dt, \qquad J = \int e^{\alpha t} \sin \beta t \, dt$$

(3) D を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V の値を求めよ。

$\boxed{6}$ A, B, C, D, O, P, Q は空間内の 7 点である。そのうち 6 点 A, B, C, D, O, P は相異なり，5 点 A, B, C, D, P はある球面 S 上にある。また，点 Q は直線 CD 上にある。さらに，ある実数 a, b に対し，次が成り立つとする。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = a\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = b\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \quad a\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 = b\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2$$

以下の問いに答えよ。

(1) 点 Q は 3 点 A, B, P が定める平面 α 上にあることを示せ。

(2) 点 Q は点 C または点 D に等しいことを示せ。