

入学試験過去問題  
数学

東北大学（理系）

対象年度：2025年

試験時間：150分

問題数：6問

——このページは白紙——

——このページは白紙——

1 原点を出発点として数直線上を動く点 P がある。試行 (\*) を次のように定める。

(\*)  $\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ 枚の硬貨を 1 回投げて,} \\ \bullet \text{ 表が出た場合は点 P を正の向きに 1 だけ進める。} \\ \bullet \text{ 裏が出た場合は 1 個のさいころを 1 回投げ,} \\ \quad \text{奇数の目が出た場合は点 P を正の向きに 1 だけ進め,} \\ \quad \text{偶数の目が出た場合は点 P を負の向きに 2 だけ進める。} \end{array} \right.$

ただし、硬貨を投げたとき表裏の出る確率はそれぞれ  $\frac{1}{2}$ 、さいころを投げたとき 1 から 6 までの整数の目の出る確率はそれぞれ  $\frac{1}{6}$  とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 試行 (\*) を 3 回繰り返したときに、点 P が原点にもどっている確率を求めよ。
- (2) 試行 (\*) を 6 回繰り返したときに、点 P が原点にもどっている確率を求めよ。
- (3)  $n$  を 3 で割り切れない正の整数とする。試行 (\*) を  $n$  回繰り返したときに、点 P が原点にもどっている確率を求めよ。

2 正の実数からなる2つの数列  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$  を次のように定める。

$$x_1 = 2, \quad y_1 = \frac{1}{2}, \quad x_{n+1} = (x_n)^5 \cdot (y_n)^2, \quad y_{n+1} = x_n \cdot (y_n)^6$$

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $k$  を実数とする。  $a_n = \log_2 x_n$ ,  $b_n = \log_2 y_n$  とおく。このとき、数列  $\{a_n + kb_n\}$  が等比数列になるような  $k$  の値をすべて求めよ。
- (2) 数列  $\{x_n\}$  の一般項を求めよ。

3  $a$  を実数とし、関数  $f(x)$  を次のように定める。

$$f(x) = x^4 + \frac{4a}{3}x^3 + (a+2)x^2$$

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 関数  $f(x)$  が極大値をもつような  $a$  のとり得る値の範囲を求めよ。
- (2) 関数  $f(x)$  が  $x = 0$  で極大値をもつような  $a$  のとり得る値の範囲を求めよ。

4  $n$  を正の整数,  $a$  を正の実数とし, 関数  $f(x)$  と  $g(x)$  を次のように定める。

$$f(x) = n \log x, \quad g(x) = ax^n$$

また, 曲線  $y = f(x)$  と曲線  $y = g(x)$  が共有点を持ち, その共有点における 2 つの曲線の接線が一致しているとする。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1)  $a$  の値を求めよ。
- (2) この 2 つの曲線と  $x$  軸で囲まれた部分の面積  $S_n$  を求めよ。
- (3) (2) で求めた  $S_n$  に対し, 極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  を求めよ。

5  $S$  を  $xyz$  空間内の原点  $O(0, 0, 0)$  を中心とする半径 1 の球面とする。また, 点  $P(a, b, c)$  を点  $N(0, 0, 1)$  とは異なる球面  $S$  上の点とする。点  $P$  と点  $N$  を通る直線  $\ell$  と  $xy$  平面との交点を  $Q$  とおく。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) 点  $Q$  の座標を  $a, b, c$  を用いて表せ。
- (2)  $xy$  平面上の点  $(p, q, 0)$  と点  $N$  を通る直線を  $m$  とする。直線  $m$  と球面  $S$  の交点のうち, 点  $N$  以外の交点の座標を  $p, q$  を用いて表せ。
- (3) 点  $(0, 0, \frac{1}{2})$  を通り, ベクトル  $(3, 4, 5)$  に直交する平面  $\alpha$  を考える。点  $P$  が平面  $\alpha$  と球面  $S$  との交わりを動くとき, 点  $Q$  は  $xy$  平面上の円周上を動くことを示せ。

6 1 辺の長さが 1 の正五角形を  $K$  とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $K$  の対角線の長さを求めよ。
- (2)  $K$  の周で囲まれた図形を  $P$  とする。また、 $P$  を  $K$  の外接円の中心の周りに角  $\theta$  だけ回転して得られる図形を  $P_\theta$  とする。 $P$  と  $P_\theta$  の共通部分の周の長さを  $l_\theta$  とする。 $\theta$  が  $0^\circ < \theta < 72^\circ$  の範囲を動くとき、 $l_\theta$  の最小値が  $2\sqrt{5}$  であることを示せ。



