入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

東北大学（理系）

対象年度： 2024年

試験時間： 150分

問題数： 6問

第　1　問

a を正の実数とし，$f(x) = x^2 - 2ax + 4a^2$ とする。O を原点とする xy 平面上の放物線 $C : y = f(x)$ の頂点を A とする。直線 OA と C の交点のうち A と異なるものを P $(p,\ f(p))$ とし，O から C へ引いた接線の接点を Q $(q,\ f(q))$ とする。ただし，$q > 0$ とする。

(1)　p, q の値を a を用いて表せ。また，$p > q$ であることを示せ。

(2)　放物線 C の $q \leqq x \leqq p$ の部分，線分 OP，および線分 OQ で囲まれた図形の面積を S とおく。S を a を用いて表せ。

(3)　(2) の S に対し，$S = \dfrac{2}{3}$ となるときの a の値を求めよ。

第　2　問

以下の問いに答えよ。

(1)　t を $t > 1$ を満たす実数とする。正の実数 x が 2 つの条件

(a)　$x > \dfrac{1}{\sqrt{t} - 1}$

(b)　$x \geqq 2 \log_t x$

をともに満たすとする。このとき，不等式

$$x + 1 > 2 \log_t (x + 1)$$

を示せ。

(2)　$n \leqq 2 \log_2 n$ を満たす正の整数 n をすべて求めよ。

第　3　問

n を 2 以上の整数とする。それぞれ A, A, B と書かれた 3 枚のカードから無作為に 1 枚抜き出し，カードをもとに戻す試行を考える。この試行を n 回繰り返し，抜き出したカードの文字を順に左から右に並べ，n 文字の文字列を作る。作った文字列内に AAA の並びがある場合は不可とする。また，作った文字列内に BB の並びがある場合も不可とする。これらの場合以外は可とする。たとえば $n=6$ のとき，文字列 AAAABA や ABBBAA や ABBABB や BBBAAA などは不可で，文字列 BABAAB や BABABA などは可である。作った文字列が可でかつ右端の 2 文字が AA である確率を p_n，作った文字列が可でかつ右端の 2 文字が BA である確率を q_n，作った文字列が可でかつ右端の文字が B である確率を r_n とそれぞれおく。

(1) p_2, q_2, r_2 をそれぞれ求めよ。また，$p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1}$ を p_n, q_n, r_n を用いてそれぞれ表せ。

(2) $p_n+2q_n+2r_n$ を n を用いて表せ。

(3) $p_n+iq_n-(1+i)r_n$ を n を用いて表せ。ただし，i は虚数単位である。

(4) $p_n=r_n$ を満たすための，n の必要十分条件を求めよ。

第 4 問

xyz 空間において，点 $\mathrm{P}_1(3,\ -1,\ 1)$ を中心とし半径が $\sqrt{5}$ の球面 S_1 と，点 $\mathrm{P}_2(5,\ 0,\ -1)$ を中心とし半径が $\sqrt{2}$ の球面 S_2 を考える。

(1) 線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の長さを求めよ。

(2) S_1 と S_2 が交わりをもつことを示せ。この交わりは円となる。この円を C とし，その中心を P_3 とする。C の半径および中心 P_3 の座標を求めよ。

(3) (2) の円 C に対し，C を含む平面を H とする。xy 平面と H の両方に平行で，大きさが 1 のベクトルをすべて求めよ。

(4) 点 Q が (2) の円 C 上を動くとき，Q と xy 平面の距離 d の最大値を求めよ。また，d の最大値を与える点 Q の座標を求めよ。

第　5　問

$x \geqq 2$ を満たす実数 x に対し，

$$f(x)=\frac{\log(2x-3)}{x}$$

とおく。必要ならば，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t}=0$ であること，および，自然対数の底 e が $2<e<3$ を満たすことを証明なしで用いてもよい。

(1)　$f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2(2x-3)}$ とおくとき，関数 $g(x)\ \ (x \geqq 2)$ を求めよ。

(2)　(1) で求めた関数 $g(x)$ に対し，$g(\alpha)=0$ を満たす 2 以上の実数 α がただ 1 つ存在することを示せ。

(3)　関数 $f(x)\ \ (x \geqq 2)$ の増減と極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$ を調べ，$y=f(x)\ \ (x \geqq 2)$ のグラフの概形を xy 平面上に描け。ただし，(2) の α を用いてよい。グラフの凹凸は調べなくてよい。

(4)　$2 \leqq m < n$ を満たす整数 $m,\ n$ の組 $(m,\ n)$ に対して，等式

$$(*)\quad (2m-3)^n=(2n-3)^m$$

が成り立つとする。このような組 $(m,\ n)$ をすべて求めよ。

第 6 問

xyz 空間内の xy 平面上にある円 $C : x^2+y^2=1$ および円板 $D : x^2+y^2 \leqq 1$ を考える。D を底面とし点 P$(0,\ 0,\ 1)$ を頂点とする円錐を K とする。A$(0,\ -1,\ 0)$，B$(0,\ 1,\ 0)$ とする。xyz 空間内の平面 $H : z=x$ を考える。すなわち，H は xz 平面上の直線 $z=x$ と線分 AB をともに含む平面である。K の側面と H の交わりとしてできる曲線を E とする。$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対し，円 C 上の点 Q$(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ をとり，線分 PQ と E の共有点を R とする。

(1) 線分 PR の長さを $r(\theta)$ とおく。$r(\theta)$ を θ を用いて表せ。

(2) 円錐 K の側面のうち，曲線 E の点 A から点 R までを結ぶ部分，線分 PA，および線分 PR により囲まれた部分の面積を $S(\theta)$ とおく。θ と実数 h が条件 $0 \leqq \theta < \theta+h \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{h\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}} \leqq S(\theta+h)-S(\theta) \leqq \frac{h\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

(3) 円錐 K の側面のうち，円 C の $x \geqq 0$ の部分と曲線 E により囲まれた部分の面積を T とおく。T を求めよ。必要であれば $\tan\dfrac{\theta}{2}=u$ とおく置換積分を用いてもよい。