

入学試験過去問題
数学

東北大学（理系）

対象年度：2024年

試験時間：150分

問題数：6問

——このページは白紙——

——このページは白紙——

1 a を正の実数とし、 $f(x) = x^2 - 2ax + 4a^2$ とする。O を原点とする xy 平面上の放物線 $C : y = f(x)$ の頂点を A とする。直線 OA と C の交点のうち A と異なるものを $P(p, f(p))$ とし、O から C へ引いた接線の接点を $Q(q, f(q))$ とする。ただし、 $q > 0$ とする。

- (1) p, q の値を a を用いて表せ。また、 $p > q$ であることを示せ。
- (2) 放物線 C の $q \leq x \leq p$ の部分、線分 OP、および線分 OQ で囲まれた図形の面積を S とおく。 S を a を用いて表せ。
- (3) (2) の S に対し、 $S = \frac{2}{3}$ となるときの a の値を求めよ。

2 以下の問いに答えよ。

- (1) t を $t > 1$ を満たす実数とする。正の実数 x が2つの条件

(a) $x > \frac{1}{\sqrt{t} - 1}$

(b) $x \geq 2 \log_t x$

をともに満たすとする。このとき、不等式

$$x + 1 > 2 \log_t(x + 1)$$

を示せ。

- (2) $n \leq 2 \log_2 n$ を満たす正の整数 n をすべて求めよ。

3 n を 2 以上の整数とする。それぞれ A, A, B と書かれた 3 枚のカードから無作為に 1 枚抜き出し、カードをもとに戻す試行を考える。この試行を n 回繰り返し、抜き出したカードの文字を順に左から右に並べ、 n 文字の文字列を作る。作った文字列内に AAA の並びがある場合は不可とする。また、作った文字列内に BB の並びがある場合も不可とする。これらの場合以外は可とする。たとえば $n = 6$ のとき、文字列 AAAABA や ABBBAA や ABBABB や BBBAAA などは不可で、文字列 BABAAB や BABABA などは可である。作った文字列が可でかつ右端の 2 文字が AA である確率を p_n 、作った文字列が可でかつ右端の 2 文字が BA である確率を q_n 、作った文字列が可でかつ右端の文字が B である確率を r_n とそれぞれおく。

- (1) p_2, q_2, r_2 をそれぞれ求めよ。また、 $p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1}$ を p_n, q_n, r_n を用いてそれぞれ表せ。
- (2) $p_n + 2q_n + 2r_n$ を n を用いて表せ。
- (3) $p_n + iq_n - (1 + i)r_n$ を n を用いて表せ。ただし、 i は虚数単位である。
- (4) $p_n = r_n$ を満たすための、 n の必要十分条件を求めよ。

4 xyz 空間において、点 $P_1(3, -1, 1)$ を中心とし半径が $\sqrt{5}$ の球面 S_1 と、点 $P_2(5, 0, -1)$ を中心とし半径が $\sqrt{2}$ の球面 S_2 を考える。

- (1) 線分 P_1P_2 の長さを求めよ。
- (2) S_1 と S_2 が交わりをもつことを示せ。この交わりは円となる。この円を C とし、その中心を P_3 とする。 C の半径および中心 P_3 の座標を求めよ。
- (3) (2) の円 C に対し、 C を含む平面を H とする。 xy 平面と H の両方に平行で、大きさが 1 のベクトルをすべて求めよ。
- (4) 点 Q が (2) の円 C 上を動くとき、 Q と xy 平面の距離 d の最大値を求めよ。また、 d の最大値を与える点 Q の座標を求めよ。

5 $x \geq 2$ を満たす実数 x に対し,

$$f(x) = \frac{\log(2x-3)}{x}$$

とおく。必要ならば、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log t}{t} = 0$ であること、および、自然対数の底 e が $2 < e < 3$ を満たすことを証明なしで用いてもよい。

(1) $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(2x-3)}$ とおくとき、関数 $g(x)$ ($x \geq 2$) を求めよ。

(2) (1) で求めた関数 $g(x)$ に対し、 $g(\alpha) = 0$ を満たす 2 以上の実数 α がただ 1 つ存在することを示せ。

(3) 関数 $f(x)$ ($x \geq 2$) の増減と極限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ を調べ、 $y = f(x)$ ($x \geq 2$) のグラフの概形を xy 平面上に描け。ただし、(2) の α を用いてよい。グラフの凹凸は調べなくてよい。

(4) $2 \leq m < n$ を満たす整数 m, n の組 (m, n) に対して、等式

$$(*) \quad (2m-3)^n = (2n-3)^m$$

が成り立つとする。このような組 (m, n) をすべて求めよ。

6 xyz 空間内の xy 平面上にある円 $C : x^2 + y^2 = 1$ および円板 $D : x^2 + y^2 \leq 1$ を考える。 D を底面とし点 $P(0, 0, 1)$ を頂点とする円錐を K とする。 $A(0, -1, 0)$, $B(0, 1, 0)$ とする。 xyz 空間内の平面 $H : z = x$ を考える。 すなわち、 H は xz 平面上の直線 $z = x$ と線分 AB をともに含む平面である。 K の側面と H の交わりとしてできる曲線を E とする。 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対し、円 C 上の点 $Q(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ をとり、線分 PQ と E の共有点を R とする。

- (1) 線分 PR の長さを $r(\theta)$ とおく。 $r(\theta)$ を θ を用いて表せ。
- (2) 円錐 K の側面のうち、曲線 E の点 A から点 R までを結ぶ部分、線分 PA 、および線分 PR により囲まれた部分の面積を $S(\theta)$ とおく。 θ と実数 h が条件 $0 \leq \theta < \theta + h \leq \frac{\pi}{2}$ を満たすとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{h\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}} \leq S(\theta + h) - S(\theta) \leq \frac{h\{r(\theta + h)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

- (3) 円錐 K の側面のうち、円 C の $x \geq 0$ の部分と曲線 E により囲まれた部分の面積を T とおく。 T を求めよ。必要であれば $\tan \frac{\theta}{2} = u$ とおく置換積分を用いてもよい。

