入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

東北大学（理系）

対象年度： 2023 年

試験時間： 150 分

問題数： 6 問

第　1　問

赤玉 4 個と白玉 5 個の入った，中の見えない袋がある。玉はすべて，色が区別できる他には違いはないものとする。A，B の 2 人が，A から交互に，袋から玉を 1 個ずつ取り出すゲームを行う。ただし取り出した玉は袋の中に戻さない。A が赤玉を取り出したら A の勝ちとし，その時点でゲームを終了する。B が白玉を取り出したら B の勝ちとし，その時点でゲームを終了する。袋から玉がなくなったら引き分けとし，ゲームを終了する。

(1)　このゲームが引き分けとなる確率を求めよ。

(2)　このゲームに A が勝つ確率を求めよ。

第　2　問

関数 $f(x) = \sin 3x + \sin x$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x) = 0$ を満たす正の実数 x のうち，最小のものを求めよ。

(2)　正の整数 m に対して，$f(x) = 0$ を満たす正の実数 x のうち，m 以下のものの個数を $p(m)$ とする。極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \frac{p(m)}{m}$ を求めよ。

第　3　問

s を実数とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = s, \quad (n+2)a_{n+1} = na_n + 2 \quad (n = 1,\, 2,\, 3,\, \cdots)$$

で定める。以下の問いに答えよ。

(1)　a_n を n と s を用いて表せ。

(2)　ある正の整数 m に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} a_n = 0$ が成り立つとする。s を m を用いて表せ。

第　4　問

実数 $a = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ に対して，整式 $f(x) = x^2 - ax + 1$ を考える。

(1)　整式 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ は $f(x)$ で割り切れることを示せ。

(2)　方程式 $f(x) = 0$ の虚数解であって虚部が正のものを α とする。α を極形式で表せ。ただし，$r^5 = 1$ を満たす実数 r が $r = 1$ のみであることは，認めて使用してよい。

(3)　設問 (2) の虚数 α に対して，$\alpha^{2023} + \alpha^{-2023}$ の値を求めよ。

第 5 問

四面体 OABC において，$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおき，次が成り立つとする。

$$\angle\mathrm{AOB} = 60^\circ, \quad \left|\overrightarrow{a}\right| = 2, \quad \left|\overrightarrow{b}\right| = 3, \quad \left|\overrightarrow{c}\right| = \sqrt{6}, \quad \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} = 3$$

ただし $\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}$ は，2 つのベクトル $\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{c}$ の内積を表す。さらに，線分 OC と線分 AB は垂直であるとする。点 C から 3 点 O, A, B を含む平面に下ろした垂線を CH とし，点 O から 3 点 A, B, C を含む平面に下ろした垂線を OK とする。

(1) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}$ を求めよ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ を用いて表せ。

(3) ベクトル $\overrightarrow{c}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{HK}}$ は平行であることを示せ。

第　6　問

関数 $f(x) = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{4}{6x+1}$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　曲線 $y = f(x)$ の接線で，傾きが 1 であり，かつ接点の x 座標が正であるものの方程式を求めよ。

(2)　座標平面上の 2 点 P$\,(x,\ f(x))$，Q$\,(x+1,\ f(x)+1)$ を考える。x が $0 \leqq x \leqq 2$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過してできる図形 S の概形を描け。また S の面積を求めよ。