

入学試験過去問題  
数 学

東北大学（理系）

対象年度：2023年

試験時間：150分

問題数：6問

——このページは白紙——

——このページは白紙——

1 赤玉 4 個と白玉 5 個の入った、中の見えない袋がある。玉はすべて、色が区別できる他には違いはないものとする。A, B の 2 人が、A から交互に、袋から玉を 1 個ずつ取り出すゲームを行う。ただし取り出した玉は袋の中に戻さない。A が赤玉を取り出したら A の勝ちとし、その時点でゲームを終了する。B が白玉を取り出したら B の勝ちとし、その時点でゲームを終了する。袋から玉がなくなったら引き分けとし、ゲームを終了する。

(1) このゲームが引き分けとなる確率を求めよ。

(2) このゲームに A が勝つ確率を求めよ。

2 関数  $f(x) = \sin 3x + \sin x$  について、以下の問いに答えよ。

(1)  $f(x) = 0$  を満たす正の実数  $x$  のうち、最小のものを求めよ。

(2) 正の整数  $m$  に対して、 $f(x) = 0$  を満たす正の実数  $x$  のうち、 $m$  以下のものの個数を  $p(m)$  とする。極限值  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{p(m)}{m}$  を求めよ。

3  $s$  を実数とし、数列  $\{a_n\}$  を

$$a_1 = s, \quad (n+2)a_{n+1} = na_n + 2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。以下の問いに答えよ。

(1)  $a_n$  を  $n$  と  $s$  を用いて表せ。

(2) ある正の整数  $m$  に対して  $\sum_{n=1}^m a_n = 0$  が成り立つとする。 $s$  を  $m$  を用いて表せ。

4 実数  $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  に対して、整式  $f(x) = x^2 - ax + 1$  を考える。

(1) 整式  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$  は  $f(x)$  で割り切れることを示せ。

(2) 方程式  $f(x) = 0$  の虚数解であって虚部が正のものを  $\alpha$  とする。 $\alpha$  を極形式で表せ。ただし、 $r^5 = 1$  を満たす実数  $r$  が  $r = 1$  のみであることは、認めて使用してよい。

(3) 設問 (2) の虚数  $\alpha$  に対して、 $\alpha^{2023} + \alpha^{-2023}$  の値を求めよ。

5 四面体 OABC において,  $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ ,  $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$  とおき, 次が成り立つとする。

$$\angle AOB = 60^\circ, \quad |\vec{a}| = 2, \quad |\vec{b}| = 3, \quad |\vec{c}| = \sqrt{6}, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 3$$

ただし  $\vec{b} \cdot \vec{c}$  は, 2つのベクトル  $\vec{b}$  と  $\vec{c}$  の内積を表す。さらに, 線分 OC と線分 AB は垂直であるとする。点 C から 3 点 O, A, B を含む平面に下ろした垂線を CH とし, 点 O から 3 点 A, B, C を含む平面に下ろした垂線を OK とする。

- (1)  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  と  $\vec{c} \cdot \vec{a}$  を求めよ。
- (2) ベクトル  $\overrightarrow{OH}$  を  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  を用いて表せ。
- (3) ベクトル  $\vec{c}$  とベクトル  $\overrightarrow{HK}$  は平行であることを示せ。

6 関数  $f(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{4}{6x+1}$  について, 以下の問いに答えよ。

- (1) 曲線  $y = f(x)$  の接線で, 傾きが 1 であり, かつ接点の  $x$  座標が正であるものの方程式を求めよ。
- (2) 座標平面上の 2 点  $P(x, f(x))$ ,  $Q(x+1, f(x)+1)$  を考える。 $x$  が  $0 \leq x \leq 2$  の範囲を動くとき, 線分 PQ が通過してできる図形  $S$  の概形を描け。また  $S$  の面積を求めよ。



