入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

東北大学（理系）

対象年度： 2022 年

試験時間： 150 分

問題数： 6 問

第　1　問

K を 3 より大きな奇数とし，$l+m+n=K$ を満たす正の奇数の組 $(l,\ m,\ n)$ の個数 N を考える。ただし，たとえば，$K=5$ のとき，$(l,\ m,\ n)=(1,\ 1,\ 3)$ と $(l,\ m,\ n)=(1,\ 3,\ 1)$ とは異なる組とみなす。

(1)　$K=99$ のとき，N を求めよ。

(2)　$K=99$ のとき，l, m, n の中に同じ奇数を 2 つ以上含む組 $(l,\ m,\ n)$ の個数を求めよ。

(3)　$N>K$ を満たす最小の K を求めよ。

第　2　問

a を実数とし，実数 x の関数 $f(x) = (x^2 + 3x + a)(x + 1)^2$ を考える。

(1)　$f(x)$ の最小値が負となるような a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$a < 2$ のとき，$f(x)$ は 2 つの極小値をもつ。このとき，$f(x)$ が極小となる x の値を α_1, α_2 $(\alpha_1 < \alpha_2)$ とする。$f(\alpha_1) < f(\alpha_2)$ を示せ。

(3)　$f(x)$ が $x < \beta$ において単調減少し，かつ，$x = \beta$ において最小値をとるとする。このとき，a のとりうる値の範囲を求めよ。

第 3 問

正の整数 n に対して,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right)$$

とする。

(1) 正の実数 x に対して，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{x}{2+x} \leqq \sqrt{1+x} - 1 \leqq \frac{x}{2}$$

(2) 極限値 $\lim_{n \to \infty} S_n$ を求めよ。

第 4 問

xy 平面の第 1 象限内において，直線 $\ell : y = mx$ $(m > 0)$ と x 軸の両方に接している半径 a の円を C とし，円 C の中心を通る直線 $y = tx$ $(t > 0)$ を考える。また，直線 ℓ と x 軸，および，円 C のすべてにそれぞれ 1 点で接する円の半径を b とする。ただし，$b > a$ とする。

(1)　m を用いて t を表せ。

(2)　t を用いて $\dfrac{b}{a}$ を表せ。

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{m \to +0} \frac{1}{m}\left(\frac{b}{a} - 1\right)$ を求めよ。

第 5 問

座標空間内において，ベクトル

$$\overrightarrow{a} = (1,\ 2,\ 1),\quad \overrightarrow{b} = (1,\ 1,\ -1),\quad \overrightarrow{c} = (0,\ 0,\ 1)$$

が定める 2 直線

$$\ell : s\overrightarrow{a},\quad \ell' : t\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} \qquad (s,\ t \text{ は実数})$$

を考える。点 A_1 を原点 $(0,\ 0,\ 0)$ とし，点 A_1 から直線 ℓ' に下ろした垂線を $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$ とおく。次に，点 $\mathrm{B}_1(t_1\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$ から直線 ℓ に下ろした垂線を $\mathrm{B}_1\mathrm{A}_2$ とおく。同様に，点 $\mathrm{A}_k(s_k\overrightarrow{a})$ から直線 ℓ' に下ろした垂線を $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k$，点 $\mathrm{B}_k(t_k\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$ から直線 ℓ に下ろした垂線を $\mathrm{B}_k\mathrm{A}_{k+1}$ とする手順を繰り返して，点 $\mathrm{A}_n(s_n\overrightarrow{a})$, $\mathrm{B}_n(t_n\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$ （n は正の整数）を定める。

(1) s_n を用いて s_{n+1} を表せ。

(2) 極限値 $S = \lim_{n\to\infty} s_n,\ T = \lim_{n\to\infty} t_n$ を求めよ。

(3) (2) で求めた $S,\ T$ に対して，点 A, B をそれぞれ $\mathrm{A}(S\overrightarrow{a})$，$\mathrm{B}(T\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$ とおくと，直線 AB は 2 直線 $\ell,\ \ell'$ の両方と直交することを示せ。

第　6　問

半径 1 の円を底面とする高さが $\sqrt{3}$ の直円柱と，半径が r の球を考える。直円柱の底面の円の中心と球の中心が一致するとき，直円柱の内部と球の内部の共通部分の体積 $V(r)$ を求めよ。