入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

東北大学（理系）

対象年度： 2021 年

試験時間： 150 分

問題数： 6 問

第 1 問

a, b を実数とする。曲線 $y = ax^2 + bx + 1$ が x 軸の正の部分と共有点をもたないような点 $(a,\ b)$ の領域を図示せよ。

第 2 問

a, b を $0 < a < 1,\ 0 < b < 1$ を満たす実数とする。平面上の三角形 ABC を考え，辺 AB を $a : 1-a$ に内分する点を P，辺 BC を $b : 1-b$ に内分する点を Q，辺 CA の中点を R とし，三角形 ABC の面積を S，三角形 PQR の面積を T とする。

(1) $\dfrac{T}{S}$ を a, b で表せ。

(2) a, b が $0 < a < \dfrac{1}{2},\ 0 < b < \dfrac{1}{2}$ の範囲を動くとき，$\dfrac{T}{S}$ がとりうる値の範囲を求めよ。

(3) p, q を 3 以上の整数とし，$a = \dfrac{1}{p},\ b = \dfrac{1}{q}$ とする。$\dfrac{T}{S}$ の逆数 $\dfrac{S}{T}$ が整数となるような p, q の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ。

第　3　問

正八角形 $\mathrm{A_1A_2 \cdots A_8}$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　3 個の頂点を結んでできる三角形のうち，直角三角形であるものの個数を求めよ。

(2)　3 個の頂点を結んでできる三角形のうち，直角三角形でも二等辺三角形でもないものの個数を求めよ。

(3)　4 個の頂点を結んでできる四角形のうち，次の条件 $(*)$ を満たすものの個数を求めよ。

$(*)$　四角形の 4 個の頂点から 3 点を選んで直角三角形を作れる。

第 4 問

座標平面において，次の条件 $(*)$ を満たす直線 ℓ を考える。

$(*)$ ℓ の傾きは 1 で，曲線 $y = x^3 - 2x$ と異なる 3 点で交わる。

その交点を x 座標が小さなものから順に P, Q, R とし，さらに線分 PQ の中点を S とする。

(1) 点 R の座標を $\left(a,\ a^3 - 2a\right)$ とするとき，点 S の座標を求めよ。

(2) 直線 ℓ が条件 $(*)$ を満たしながら動くとき，点 S の軌跡を求めよ。

(3) 直線 ℓ が条件 $(*)$ を満たしながら動くとき，線分 PS が動いてできる領域の面積を求めよ。

第 5 問

z を複素数とする。複素数平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0)$, $\mathrm{A}(z)$, $\mathrm{B}(z^2)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) 3 点 O, A, B が同一直線上にあるための z の必要十分条件を求めよ。

(2) 3 点 O, A, B が二等辺三角形の頂点になるような z 全体を複素数平面上に図示せよ。

(3) 3 点 O, A, B が二等辺三角形の頂点であり，かつ z の偏角 θ が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$ を満たすとき，三角形 OAB の面積の最大値とそのときの z の値を求めよ。

第　6　問

以下の問いに答えよ。

(1)　正の実数 a と正の整数 n に対して次の等式が成り立つことを示せ。ただし，e は自然対数の底とする。

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x \, dx$$

(2)　正の実数 a と正の整数 n に対して次の不等式を示せ。

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \leqq \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x \, dx \leqq \frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$$

(3)　不等式

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) \right| < 10^{-3}$$

を満たす最小の正の整数 n を求めよ。必要ならば $2 < e < 3$ であることは証明なしに用いてもよい。