入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

東北大学（理系）

対象年度： 2020 年

試験時間： 150 分

問題数： 6 問

第　1　問

$\mathrm{AB}=1,\ \mathrm{AC}=1,\ \mathrm{BC}=\dfrac{1}{2}$ である $\triangle\mathrm{ABC}$ の頂点 B から辺 AC に下ろした垂線と辺 AC との交点を H とする。

(1) $\angle\mathrm{BAC}$ を θ と表すとき，$\cos\theta,\ \sin\theta$ の値を求めよ。

(2) 実数 s は $0<s<1$ の範囲を動くとする。辺 BH を $s:(1-s)$ に内分する点を P とするとき，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ の最小値およびそのときの s の値を求めよ。

第　2　問

a を 0 でない実数とする。xy 平面において，円 $C : x^2 - 2ax + y^2 - 4y + 4 = 0$，直線 $L : -4x + 3y + a = 0$，直線 $M : 3x + 4y - 7a = 0$ を考える。

(1)　L と M の交点が C 上にあるような a の値を求めよ。

(2)　C と L が異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。

(3)　集合 $\{\mathrm{P} \mid$ 点 P は C と L の共有点 $\} \cup \{\mathrm{P} \mid$ 点 P は C と M の共有点 $\}$ の要素の個数が 3 となるような a の値をすべて求めよ。

第　3　問

n を正の整数，$a,\,b$ を 0 以上の整数とする。

(1)　$n \geqq 3$ のとき不等式 $2^n + n^2 + 8 < 3^n$ が成り立つことを示せ。

(2)　不等式 $2^n + n^2 + 8 \geqq 3^n$ を満たす n をすべて求めよ。

(3)　等式 $2^n + n^2 + 8 = 3^n + an + b$ を満たす $a,\,b,\,n$ の組 $(a,\ b,\ n)$ をすべて求めよ。

第　4　問

白玉 3 個，赤玉 2 個の合計 5 個の玉が入った箱と硬貨がある。箱から無作為に玉を 1 個取り出し，硬貨を投げて表が出たら，その玉を手元に残し，裏が出たら箱に戻す試行を行う。試行後に箱の中の玉がなくなったら試行は停止する。また，最初手元に玉はないものとする。

(1)　2 回の試行の結果，手元に白玉が 2 個ある確率を求めよ。

(2)　3 回の試行の結果，手元の玉が白玉 1 個，赤玉 1 個の計 2 個となる確率を求めよ。

(3)　n を 5 以上の整数とし，ちょうど n 回目で試行が停止する確率 p_n を求めよ。

(4)　(3) の確率 p_n が最大となる n を求めよ。

第　5　問

実数 t に対して複素数 $z = \dfrac{-1}{t+i}$ を考える。ただし，i は虚数単位とする。

(1)　z の実部と虚部をそれぞれ t を用いて表せ。

(2)　絶対値 $\left| z - \dfrac{i}{2} \right|$ を求めよ。

(3)　実数 t が $-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くとき，点 z はどのような図形を描くか，複素数平面上に図示せよ。

第　6　問

正の整数 m, n に対して実数 $A(m,n)$ を次の定積分で定める。

$$A(m,n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^n x\,dx$$

(1)　次の等式が成り立つことを示せ。

$$A(m,n)=A(n,m),\quad A(m+2,n)+A(m,n+2)=A(m,n)$$

(2)　$A(m,1)$ を求めよ。

(3)　次の等式が成り立つことを示せ。

$$A(m,n+2)=\frac{n+1}{m+1}A(m+2,n)$$

(4)　m または n が奇数ならば，$A(m,n)$ は有理数であることを示せ。