

入学試験過去問題
数 学

東北大学（理系）

対象年度：2020年

試験時間：150分

問題数：6問

——このページは白紙——

——このページは白紙——

1 $AB = 1, AC = 1, BC = \frac{1}{2}$ である $\triangle ABC$ の頂点 B から辺 AC に下ろした垂線と辺 AC との交点を H とする。

- (1) $\angle BAC$ を θ と表すとき, $\cos \theta, \sin \theta$ の値を求めよ。
- (2) 実数 s は $0 < s < 1$ の範囲を動くとする。辺 BH を $s : (1 - s)$ に内分する点を P とするとき, $AP^2 + BP^2 + CP^2$ の最小値およびそのときの s の値を求めよ。

2 a を 0 でない実数とする。 xy 平面において, 円 $C : x^2 - 2ax + y^2 - 4y + 4 = 0$, 直線 $L : -4x + 3y + a = 0$, 直線 $M : 3x + 4y - 7a = 0$ を考える。

- (1) L と M の交点が C 上にあるような a の値を求めよ。
- (2) C と L が異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。
- (3) 集合 $\{P \mid \text{点 } P \text{ は } C \text{ と } L \text{ の共有点}\} \cup \{P \mid \text{点 } P \text{ は } C \text{ と } M \text{ の共有点}\}$ の要素の個数が 3 となるような a の値をすべて求めよ。

3 n を正の整数, a, b を 0 以上の整数とする。

- (1) $n \geq 3$ のとき不等式 $2^n + n^2 + 8 < 3^n$ が成り立つことを示せ。
- (2) 不等式 $2^n + n^2 + 8 \geq 3^n$ を満たす n をすべて求めよ。
- (3) 等式 $2^n + n^2 + 8 = 3^n + an + b$ を満たす a, b, n の組 (a, b, n) をすべて求めよ。

4 白玉 3 個, 赤玉 2 個の合計 5 個の玉が入った箱と硬貨がある。箱から無作為に玉を 1 個取り出し, 硬貨を投げて表が出たら, その玉を手元に残し, 裏が出たら箱に戻す試行を行う。試行後に箱の中の玉がなくなったら試行は停止する。また, 最初手元に玉はないものとする。

- (1) 2 回の試行の結果, 手元に白玉が 2 個ある確率を求めよ。
- (2) 3 回の試行の結果, 手元の玉が白玉 1 個, 赤玉 1 個の計 2 個となる確率を求めよ。
- (3) n を 5 以上の整数とし, ちょうど n 回目で試行が停止する確率 p_n を求めよ。
- (4) (3) の確率 p_n が最大となる n を求めよ。

5 実数 t に対して複素数 $z = \frac{-1}{t+i}$ を考える。ただし、 i は虚数単位とする。

- (1) z の実部と虚部をそれぞれ t を用いて表せ。
- (2) 絶対値 $\left| z - \frac{i}{2} \right|$ を求めよ。
- (3) 実数 t が $-1 \leq t \leq 1$ の範囲を動くとき、点 z はどのような図形を描くか、複素数平面上に図示せよ。

6 正の整数 m, n に対して実数 $A(m, n)$ を次の定積分で定める。

$$A(m, n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^n x dx$$

- (1) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$A(m, n) = A(n, m), \quad A(m+2, n) + A(m, n+2) = A(m, n)$$

- (2) $A(m, 1)$ を求めよ。
- (3) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$A(m, n+2) = \frac{n+1}{m+1} A(m+2, n)$$

- (4) m または n が奇数ならば、 $A(m, n)$ は有理数であることを示せ。

