

# 入学試験過去問題

## 数 学

東北大学（理系）

対象年度：2017年

試験時間：150分

問題数：6問

## 第 1 問

$a, b$  を実数とする。 $y = |x^2 - 4|$  で表される曲線を  $C$  とし,  $y = ax + b$  で表される直線を  $l$  とする。

- (1)  $l$  が点  $(-2, 0)$  を通り,  $l$  と  $C$  がちょうど 3 つの共有点をもつような  $a, b$  の条件を求めよ。
- (2)  $l$  と  $C$  がちょうど 3 つの共有点をもつような点  $(a, b)$  の軌跡を  $ab$  平面上に図示せよ。

## 第 2 問

A 君と B 君はそれぞれ、0 から 5 までの数字が 1 つずつ書かれた 6 枚のカードが入った箱を 1 つもっている。2 人は、自分の箱の中から無作為に 3 枚のカードを取り出して得点を競うゲームをする。取り出された 3 枚のカードに 0 が含まれていない場合の得点は 3 枚のカードに書かれた数の平均値とし、0 が含まれている場合は残り 2 枚のカードに書かれた数の合計とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) A 君, B 君の少なくとも一方が 0 を取り出して、しかも双方とも得点が 3 点となる確率を求めよ。
- (2) A 君の得点が B 君の得点より大きいときの, A 君の得点が整数ではない確率を求めよ。

### 第 3 問

$a, b, c$  を 1 以上 7 以下の互いに異なる整数とする。

- (1) 2 次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  が有理数解をもつような組  $(a, b, c)$  の総数を求めよ。
- (2) 2 次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  が少なくとも一つの整数解をもつような組  $(a, b, c)$  の総数を求めよ。

## 第 4 問

$s$  を正の実数とする。鋭角三角形  $ABC$  において、辺  $AB$  を  $s:1$  に内分する点を  $D$  とし、辺  $BC$  を  $s:3$  に内分する点を  $E$  とする。線分  $CD$  と線分  $AE$  の交点を  $F$  とする。以下の問いに答えよ。

- (1)  $\overrightarrow{AF} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$  とするとき、 $\alpha$  と  $\beta$  を求めよ。
- (2)  $F$  から辺  $AC$  に下ろした垂線を  $FG$  とする。 $FG$  の長さが最大となるときの  $s$  を求めよ。

## 第 5 問

$\alpha, \beta, \gamma$  を複素数とし,

$$z\bar{z} + \alpha z + \beta\bar{z} + \gamma = 0 \quad \dots\dots (*)$$

を満たす複素数  $z$  を考える。以下の問いに答えよ。

(1)  $z$  は

$$(\alpha - \bar{\beta})z - (\bar{\alpha} - \beta)\bar{z} + \gamma - \bar{\gamma} = 0$$

を満たすことを示せ。

(2)  $|\alpha| = |\beta| \neq 0$  と仮定し, また  $\gamma$  は負の実数であると仮定する。このとき,  $(*)$  を満たす  $z$  がちょうど 2 個あるための必要十分条件を  $\alpha, \beta$  を用いて表せ。

## 第 6 問

$a, b, c$  を実数とし,

$$I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax} \cos bx \, dx, \quad J(a, b, c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax} \sin bx \sin cx \, dx$$

とおく。ただし,  $a \neq 0$  とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1)  $I(a, b)$  を求めよ。
- (2)  $J(a, b, c)$  を  $I(a, b + c)$  と  $I(a, b - c)$  を用いて表せ。
- (3) 次の極限を求めよ。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin tx \sin 2tx \cos 3tx \cos 4tx \, dx$$