

# 入学試験過去問題

## 数 学

東北大学（理系）

対象年度：2016 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

## 第 1 問

鋭角三角形  $\triangle ABC$  において、頂点  $A, B, C$  から各対辺に垂線  $AD, BE, CF$  を下ろす。これらの垂線は垂心  $H$  で交わる。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 四角形  $BCEF$  と  $AFHE$  が円に内接することを示せ。
- (2)  $\angle ADE = \angle ADF$  であることを示せ。

## 第 2 問

以下の問いに答えよ。

- (1) 6 以上の整数  $n$  に対して不等式

$$2^n > n^2 + 7$$

が成り立つことを数学的帰納法により示せ。

- (2) 等式

$$p^q = q^p + 7$$

を満たす素数の組  $(p, q)$  をすべて求めよ。

### 第 3 問

サイコロを 3 回振って出た目の数をそれぞれ順に  $a, b, c$  とする。以下の問いに答えよ。

- (1)  $a, b, c$  がある直角三角形の 3 辺の長さとなる確率を求めよ。
- (2)  $a, b, c$  がある鈍角三角形の 3 辺の長さとなる確率を求めよ。

## 第 4 問

多項式  $P(x)$  を

$$P(x) = \frac{(x+i)^7 - (x-i)^7}{2i}$$

により定める。ただし、 $i$  は虚数単位とする。以下の問いに答えよ。

- (1)  $P(x) = a_0x^7 + a_1x^6 + a_2x^5 + a_3x^4 + a_4x^3 + a_5x^2 + a_6x + a_7$  とするとき、係数  $a_0, \dots, a_7$  をすべて求めよ。

- (2)  $0 < \theta < \pi$  に対して、

$$P\left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right) = \frac{\sin 7\theta}{\sin^7 \theta}$$

が成り立つことを示せ。

- (3) (1) で求めた  $a_1, a_3, a_5, a_7$  を用いて、多項式  $Q(x) = a_1x^3 + a_3x^2 + a_5x + a_7$  を考える。 $\theta = \frac{\pi}{7}$  として、 $k = 1, 2, 3$  について

$$x_k = \frac{\cos^2 k\theta}{\sin^2 k\theta}$$

とおく。このとき、 $Q(x_k) = 0$  が成り立つことを示し、 $x_1 + x_2 + x_3$  の値を求めよ。

## 第 5 問

空間内に、直線  $l$  で交わる 2 平面  $\alpha, \beta$  と交線  $l$  上の 1 点  $O$  がある。さらに、平面  $\alpha$  上の直線  $m$  と平面  $\beta$  上の直線  $n$  を、どちらも点  $O$  を通り  $l$  に垂直にとる。 $m, n$  上にそれぞれ点  $P, Q$  があり、

$$OP = \sqrt{3}, \quad OQ = 2, \quad PQ = 1$$

であるとする。線分  $PQ$  上の動点  $T$  について、 $PT = t$  とおく。点  $T$  を中心とした半径  $\sqrt{2}$  の球  $S$  を考える。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $S$  の平面  $\alpha$  による切り口の面積を  $t$  を用いて表せ。
- (2)  $S$  の平面  $\alpha$  による切り口の面積と  $S$  の平面  $\beta$  による切り口の面積の和を  $f(t)$  とおく。 $T$  が線分  $PQ$  上を動くとき、 $f(t)$  の最大値と、そのときの  $t$  の値を求めよ。

## 第 6 問

関数

$$f(x) = \int_0^{\pi} |\sin(t-x) - \sin 2t| dt$$

の区間  $0 \leq x \leq \pi$  における最大値と最小値を求めよ。