

入学試験過去問題

数 学

東北大学（理系）

対象年度：2015 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

第 1 問

xy 平面において、次の式が表す曲線を C とする。

$$x^2 + 4y^2 = 1, \quad x > 0, \quad y > 0$$

P を C 上の点とする。 P で C に接する直線を l とし、 P を通り l と垂直な直線を m とし、 x 軸と y 軸と m で囲まれてできる三角形の面積を S とする。 P が C 上の点全体を動くとき、 S の最大値とそのときの P の座標を求めよ。

第 2 問

xy 平面において、3 次関数 $y = x^3 - x$ のグラフを C とし、不等式

$$x^3 - x > y > -x$$

の表す領域を D とする。また、 P を D の点とする。

- (1) P を通り C に接する直線が 3 本存在することを示せ。
- (2) P を通り C に接する 3 本の直線の傾きの和と積がともに 0 となるような P の座標を求めよ。

第 3 問

サイコロを 3 回投げて出た目の数を順に p_1, p_2, p_3 とし, x の 2 次方程式

$$2p_1x^2 + p_2x + 2p_3 = 0 \quad \dots\dots (*)$$

を考える。

- (1) 方程式 (*) が実数解をもつ確率を求めよ。
- (2) 方程式 (*) が実数でない 2 つの複素数解 α, β をもち, かつ $\alpha\beta = 1$ が成り立つ確率を求めよ。
- (3) 方程式 (*) が実数でない 2 つの複素数解 α, β をもち, かつ $\alpha\beta < 1$ が成り立つ確率を求めよ。

第 4 問

$a > 0$ を実数とする。 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し、座標平面の 3 点

$$(2n\pi, 0), \quad \left(\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi, \frac{1}{\{(2n + \frac{1}{2})\pi\}^a} \right), \quad ((2n+1)\pi, 0)$$

を頂点とする三角形の面積を A_n とし、

$$B_n = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin x}{x^a} dx, \quad C_n = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x^a} dx$$

とおく。

(1) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{2}{\{(2n+1)\pi\}^a} \leq B_n \leq \frac{2}{(2n\pi)^a}$$

(2) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n}$ を求めよ。

(3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{C_n}$ を求めよ。

第 5 問

$t > 0$ を実数とする。座標平面において、3 点 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, $P(t, \sqrt{3}t)$ を頂点とする三角形 ABP を考える。

- (1) 三角形 ABP が鋭角三角形となるような t の範囲を求めよ。
- (2) 三角形 ABP の垂心の座標を求めよ。
- (3) 辺 AB , BP , PA の中点をそれぞれ M , Q , R とおく。 t が (1) で求めた範囲を動くとき、三角形 ABP を線分 MQ , QR , RM で折り曲げてできる四面体の体積の最大値と、そのときの t の値を求めよ。

第 6 問

$k \geq 2$ と n を自然数とする。 n が k 個の連続する自然数の和であるとき、すなわち、

$$n = m + (m + 1) + \cdots + (m + k - 1)$$

が成り立つような自然数 m が存在するとき、 n を k -連続和とよぶことにする。ただし、自然数とは 1 以上の整数のことである。

- (1) n が k -連続和であることは、次の条件 (A), (B) の両方が成り立つことと同値であることを示せ。

(A) $\frac{n}{k} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2}$ は整数である。

(B) $2n > k^2$ が成り立つ。

- (2) f を自然数とする。 $n = 2^f$ のとき、 n が k -連続和となるような自然数 $k \geq 2$ は存在しないことを示せ。

- (3) f を自然数とし、 p を 2 でない素数とする。 $n = p^f$ のとき、 n が k -連続和となるような自然数 $k \geq 2$ の個数を求めよ。