

入学試験過去問題

数 学

東北大学（理系）

対象年度：2014 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

第 1 問

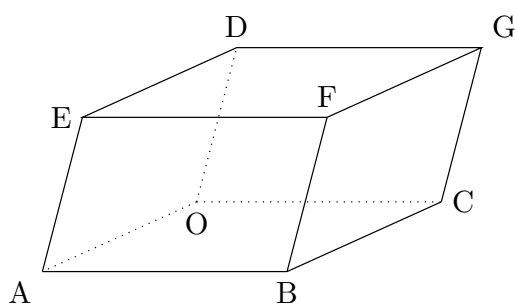
$x = t + \frac{1}{3t}$ ($0 < t \leq \frac{1}{2}$) とする。

- (1) x のとり得る値の範囲を求めよ。
- (2) x の方程式 $x^2 + ax + b = 0$ が (1) の範囲に少なくとも 1 つの解をもつような点 (a, b) の存在範囲を図示せよ。

第 2 問

下図のような平行六面体 $OABC-DEFG$ が xyz 空間内にあり, $O(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 0)$, $C(0, 3, 0)$, $D(-1, 0, \sqrt{6})$ とする。辺 AB の中点を M とし, 辺 DG 上の点 N を $MN = 4$ かつ $DN < GN$ を満たすように定める。

- (1) N の座標を求めよ。
- (2) 3 点 E, M, N を通る平面と y 軸との交点 P を求めよ。
- (3) 3 点 E, M, N を通る平面による平行六面体 $OABC-DEFG$ の切り口の面積を求めよ。



第 3 問

- 1, 2, 3, 4, 5 のそれぞれの数字が書かれた玉が 2 個ずつ、合計 10 個ある。
- (1) 10 個の玉を袋に入れ、よくかき混ぜて 2 個の玉を取り出す。書かれている 2 つの数字の積が 10 となる確率を求めよ。
 - (2) 10 個の玉を袋に入れ、よくかき混ぜて 4 個の玉を取り出す。書かれている 4 つの数字の積が 100 となる確率を求めよ。
 - (3) 10 個の玉を袋に入れ、よくかき混ぜて 6 個の玉を順に取り出す。1 個目から 3 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積と、4 個目から 6 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積が等しい確率を求めよ。

第 4 問

不等式 $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ が表す xy 平面内の領域を D とする。P を円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点, Q と R を円 $x^2 + y^2 = 4$ 上の異なる 2 点とし, 三角形 PQR は領域 D に含まれているとする。 a, b を実数とし, 行列 $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換により P は P' , Q は Q' , R は R' に移されるとする。このとき, 三角形 $P'Q'R'$ が領域 D に含まれるための a, b の必要十分条件を求めよ。ただし, 三角形は内部も含めて考えるものとする。

第 5 問

整数 n に対して,

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos((2n+1)x)}{\sin x} dx$$

とする。

- (1) I_0 を求めよ。
- (2) n を正の整数とすると、 $I_n - I_{n-1}$ を求めよ。
- (3) I_5 を求めよ。

第 6 問

以下の問いに答えよ。

- (1) n を自然数, a を正の定数として,

$$f(x) = (n+1)\{\log(a+x) - \log(n+1)\} - n(\log a - \log n) - \log x$$

とおく。 $x > 0$ における関数 $f(x)$ の極値を求めよ。ただし、対数は自然対数とする。

- (2) n が 2 以上の自然数のとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{k} > (n+1)^{\frac{1}{n}}$$