2014年度前期日程入学試験学力検査問題

数　　学〔理系〕

志望学部／学科／専攻	試 験 時 間	指定解答用紙
理系学部	150 分	1 ～ 6

注 意 事 項

1. **試験開始の合図があるまで，この問題冊子，解答用紙を開いてはいけない。**
2. 問題冊子の白紙のページや問題の余白は草案のために使用してよい。なお，ページの脱落，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 解答は，必ず**黒鉛筆**（シャープペンシルも可）で記入し，ボールペン・万年筆などを使用してはいけない。
4. **解答用紙の受験記号番号欄（1 枚につき 2 か所）には，忘れずに受験票と同じ受験記号番号をはっきりと判読できるように記入すること。**
5. 解答は，必ず**解答用紙の指定された箇所**に記入すること。
6. **解答用紙を持ち帰ってはいけない。**
7. 試験終了後，この問題冊子は持ち帰ること。

―――このページは白紙―――

―――このページは白紙―――

$\boxed{1}$ $x = t + \dfrac{1}{3t}\ \left(0 < t \leqq \dfrac{1}{2}\right)$ とする。

(1) x のとり得る値の範囲を求めよ。

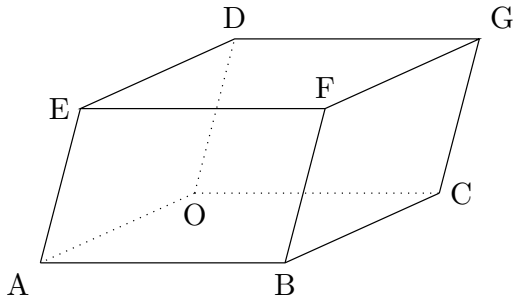
(2) x の方程式 $x^2 + ax + b = 0$ が (1) の範囲に少なくとも 1 つの解をもつような点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ。

$\boxed{2}$ 下図のような平行六面体 OABC-DEFG が xyz 空間内にあり，O $(0,\ 0,\ 0)$，A $(2,\ 0,\ 0)$，C $(0,\ 3,\ 0)$，D $\left(-1,\ 0,\ \sqrt{6}\right)$ とする。辺 AB の中点を M とし，辺 DG 上の点 N を MN $= 4$ かつ DN $<$ GN を満たすように定める。

(1) N の座標を求めよ。

(2) 3 点 E，M，N を通る平面と y 軸との交点 P を求めよ。

(3) 3 点 E，M，N を通る平面による平行六面体 OABC-DEFG の切り口の面積を求めよ。



$\boxed{3}$ 1，2，3，4，5 のそれぞれの数字が書かれた玉が 2 個ずつ，合計 10 個ある。

(1) 10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 2 個の玉を取り出す。書かれている 2 つの数字の積が 10 となる確率を求めよ。

(2) 10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 4 個の玉を取り出す。書かれている 4 つの数字の積が 100 となる確率を求めよ。

(3) 10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 6 個の玉を順に取り出す。1 個目から 3 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積と，4 個目から 6 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積が等しい確率を求めよ。

$\boxed{4}$ 不等式 $1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4$ が表す xy 平面内の領域を D とする。P を円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点，Q と R を円 $x^2 + y^2 = 4$ 上の異なる 2 点とし，三角形 PQR は領域 D に含まれているとする。a，b を実数とし，行列 $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換により P は P′，Q は Q′，R は R′ に移されるとする。このとき，三角形 P′Q′R′ が領域 D に含まれるための a，b の必要十分条件を求めよ。ただし，三角形は内部も含めて考えるものとする。

$\boxed{5}$ 整数 n に対して，

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos((2n+1)x)}{\sin x}\,dx$$

とする。

(1) I_0 を求めよ。

(2) n を正の整数とするとき，$I_n - I_{n-1}$ を求めよ。

(3) I_5 を求めよ。

$\boxed{6}$ 以下の問いに答えよ。

(1) n を自然数，a を正の定数として，

$$f(x) = (n+1)\{\log(a+x) - \log(n+1)\} - n(\log a - \log n) - \log x$$

とおく。$x > 0$ における関数 $f(x)$ の極値を求めよ。ただし，対数は自然対数とする。

(2) n が 2 以上の自然数のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} > (n+1)^{\frac{1}{n}}$$