

# 入学試験過去問題

## 数 学

東北大学（理系）

対象年度：2013 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

## 第 1 問

$k$  を実数とする。3 次式  $f(x) = x^3 - kx^2 - 1$  に対し、方程式  $f(x) = 0$  の 3 つの解を  $\alpha, \beta, \gamma$  とする。 $g(x)$  は  $x^3$  の係数が 1 である 3 次式で、方程式  $g(x) = 0$  の 3 つの解が  $\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha$  であるものとする。

- (1)  $g(x)$  を  $k$  を用いて表せ。
- (2) 2 つの方程式  $f(x) = 0$  と  $g(x) = 0$  が共通の解をもつような  $k$  の値を求めよ。

## 第 2 問

四面体  $OABC$  において,  $OA = OB = OC = 1$  とする。  $\angle AOB = 60^\circ$ ,  $\angle BOC = 45^\circ$ ,  $\angle COA = 45^\circ$  とし,  $\vec{a} = \vec{OA}$ ,  $\vec{b} = \vec{OB}$ ,  $\vec{c} = \vec{OC}$  とおく。点  $C$  から面  $OAB$  に垂線を引き, その交点を  $H$  とする。

(1) ベクトル  $\vec{OH}$  を  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  を用いて表せ。

(2)  $CH$  の長さを求めよ。

(3) 四面体  $OABC$  の体積を求めよ。

### 第 3 問

A, B の 2 人が, サイコロを 1 回ずつ交互に投げるゲームを行う。自分の出したサイコロの目を合計して先に 6 以上になった方を勝ちとし, その時点でゲームを終了する。A から投げ始めるものとし, 以下の問いに答えよ。

- (1) A がちょうど 2 回投げて A が勝ちとなる確率を求めよ。
- (2) B がちょうど 2 回投げて B が勝ちとなる確率を求めよ。
- (3) B がちょうど 3 回投げて, その時点でゲームが終了していない確率を求めよ。

## 第 4 問

数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  を

$$a_n = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n \sin \theta} d\theta, \quad b_n = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n \sin \theta} \cos \theta d\theta \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。ただし,  $e$  は自然対数の底とする。

- (1) 一般項  $b_n$  を求めよ。
- (2) すべての  $n$  について,  $b_n \leq a_n \leq \frac{2}{\sqrt{3}} b_n$  が成り立つことを示せ。
- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(na_n)$  を求めよ。ただし, 対数は自然対数とする。

## 第 5 問

2 次の正方行列  $A$  を  $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$  で定める。 $n = 1, 2, 3, \dots$  に対して、点  $P_n(x_n, y_n)$  を関係式

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。ただし、 $x_0 = 1, y_0 = 0$  とする。

(1)  $A^4$  を求めよ。

(2)  $n = 0, 1, 2, \dots$  に対して、

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = (E - A^{n+1})(E - A)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ。ただし、 $E$  は 2 次の単位行列とする。

(3) 原点  $O$  から  $P_n$  までの距離  $OP_n$  が最大となる  $n$  を求めよ。

## 第 6 問

半径 1 の円を底面とする高さ  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  の直円柱がある。底面の円の中心を  $O$  とし、直径を 1 つ取り  $AB$  とおく。 $AB$  を含み底面と  $45^\circ$  の角度をなす平面でこの直円柱を 2 つの部分に分けると、体積の小さい方の部分を  $V$  とする。

- (1) 直径  $AB$  と直交し、 $O$  との距離が  $t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) であるような平面で  $V$  を切ったときの断面積  $S(t)$  を求めよ。
- (2)  $V$  の体積を求めよ。