2013年度前期日程入学試験学力検査問題

数　　学〔理系〕

志望学部／学科／専攻	試 験 時 間	指定解答用紙
理系学部	150 分	1 ～ 6

注 意 事 項

1. **試験開始の合図があるまで，この問題冊子，解答用紙を開いてはいけない。**
2. 問題冊子の白紙のページや問題の余白は草案のために使用してよい。なお，ページの脱落，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 解答は，必ず**黒鉛筆**（シャープペンシルも可）で記入し，ボールペン・万年筆などを使用してはいけない。
4. **解答用紙の受験記号番号欄（1 枚につき 2 か所）には，忘れずに受験票と同じ受験記号番号をはっきりと判読できるように記入すること。**
5. 解答は，必ず**解答用紙の指定された箇所**に記入すること。
6. **解答用紙を持ち帰ってはいけない。**
7. 試験終了後，この問題冊子は持ち帰ること。

―――このページは白紙―――

―――このページは白紙―――

$\boxed{1}$ k を実数とする。3 次式 $f(x) = x^3 - kx^2 - 1$ に対し，方程式 $f(x) = 0$ の 3 つの解を α，β，γ とする。$g(x)$ は x^3 の係数が 1 である 3 次式で，方程式 $g(x) = 0$ の 3 つの解が $\alpha\beta$，$\beta\gamma$，$\gamma\alpha$ であるものとする。

(1) $g(x)$ を k を用いて表せ。

(2) 2 つの方程式 $f(x) = 0$ と $g(x) = 0$ が共通の解をもつような k の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 四面体 OABC において，$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = 1$ とする。$\angle\mathrm{AOB} = 60^\circ$，$\angle\mathrm{BOC} = 45^\circ$，$\angle\mathrm{COA} = 45^\circ$ とし，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。点 C から面 OAB に垂線を引き，その交点を H とする。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) CH の長さを求めよ。

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ。

$\boxed{3}$ A，B の 2 人が，サイコロを 1 回ずつ交互に投げるゲームを行う。自分の出したサイコロの目を合計して先に 6 以上になった方を勝ちとし，その時点でゲームを終了する。A から投げ始めるものとし，以下の問いに答えよ。

(1) A がちょうど 2 回投げて A が勝ちとなる確率を求めよ。

(2) B がちょうど 2 回投げて B が勝ちとなる確率を求めよ。

(3) B がちょうど 3 回投げて，その時点でゲームが終了していない確率を求めよ。

$\boxed{4}$ 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$a_n = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}\,d\theta, \quad b_n = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}\cos\theta\,d\theta \quad (n = 1,\, 2,\, 3,\, \cdots)$$

で定める。ただし，e は自然対数の底とする。

(1) 一般項 b_n を求めよ。

(2) すべての n について，$b_n \leqq a_n \leqq \dfrac{2}{\sqrt{3}} b_n$ が成り立つことを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log(na_n)$ を求めよ。ただし，対数は自然対数とする。

$\boxed{5}$　2 次の正方行列 A を $A = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ で定める。$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，点 $\mathrm{P}_n\,(x_n,\ y_n)$ を関係式

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める。ただし，$x_0 = 1$，$y_0 = 0$ とする。

(1)　A^4 を求めよ。

(2)　$n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して，

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = (E - A^{n+1})(E - A)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ。ただし，E は 2 次の単位行列とする。

(3)　原点 O から P_n までの距離 OP_n が最大となる n を求めよ。

$\boxed{6}$　半径 1 の円を底面とする高さ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の直円柱がある。底面の円の中心を O とし，直径を 1 つ取り AB とおく。AB を含み底面と 45° の角度をなす平面でこの直円柱を 2 つの部分に分けるとき，体積の小さい方の部分を V とする。

(1)　直径 AB と直交し，O との距離が t $(0 \leqq t \leqq 1)$ であるような平面で V を切ったときの断面積 $S(t)$ を求めよ。

(2)　V の体積を求めよ。