

# 入学試験過去問題

## 数 学

東北大学（理系）

対象年度：2012年

試験時間：150分

問題数：6問

## 第 1 問

$s, t$  を実数とする。以下の問いに答えよ。

- (1)  $x = s + t + 1, y = s - t - 1$  とおく。 $s, t$  が  $s \geq 0, t \geq 0$  の範囲を動くとき、点  $(x, y)$  の動く範囲を座標平面内に図示せよ。
- (2)  $x = st + s - t + 1, y = s + t - 1$  とおく。 $s, t$  が実数全体を動くとき、点  $(x, y)$  の動く範囲を座標平面内に図示せよ。

## 第 2 問

$m$  を実数とする。座標平面上で直線  $y = x$  に関する対称移動を表す 1 次変換を  $f$  とし、直線  $y = mx$  に関する対称移動を表す 1 次変換を  $g$  とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 1 次変換  $g$  を表す行列  $A$  を求めよ。
- (2) 合成変換  $g \circ f$  を表す行列  $B$  を求めよ。
- (3)  $B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  となる  $m$  をすべて求めよ。

### 第 3 問

袋 A, 袋 B のそれぞれに, 1 から  $N$  の自然数がひとつずつ書かれた  $N$  枚のカードが入っている。これらのカードをよくかきまぜて取り出していく。以下の問いに答えよ。

- (1)  $N = 4$  とする。袋 A, B のそれぞれから同時に 1 枚ずつカードを取り出し, 数字が同じかどうかを確認する操作を繰り返す。ただし, 取り出したカードは元には戻さないものとする。4 回のカードの取り出し操作が終わった後, 数字が一致していた回数を  $X$  とする。 $X = 1, X = 2, X = 3, X = 4$  となる確率をそれぞれ求めよ。また,  $X$  の期待値を求めよ。
- (2)  $N = 3$  とし,  $n$  は自然数とする。袋 A, B のそれぞれから同時に 1 枚ずつカードを取り出し, カードの数字が一致していたら, それらのカードを取り除き, 一致していなかったら, 元の袋に戻すという操作を繰り返す。カードが初めて取り除かれるのが  $n$  回目で起こる確率を  $p_n$  とし,  $n$  回目の操作ですべてのカードが取り除かれる確率を  $q_n$  とする。 $p_n$  と  $q_n$  を求めよ。

## 第 4 問

$0 \leq x \leq \pi$  に対して, 関数  $f(x)$  を

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos |t - x|}{1 + \sin |t - x|} dt$$

と定める。 $f(x)$  の  $0 \leq x \leq \pi$  における最大値と最小値を求めよ。

## 第 5 問

長さ 1 の線分 AB を直径とする円周  $C$  上に点 P をとる。ただし、点 P は点 A, B とは一致していないとする。線分 AB 上の点 Q を  $\angle BPQ = \frac{\pi}{3}$  となるようにとり、線分 BP の長さを  $x$  とし、線分 PQ の長さを  $y$  とする。以下の問いに答えよ。

- (1)  $y$  を  $x$  を用いて表せ。
- (2) 点 P が 2 点 A, B を除いた円周  $C$  上を動くとき、 $y$  が最大となる  $x$  を求めよ。

## 第 6 問

数列  $\{a_n\}$  を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{3a_n + 4}{2a_n + 3}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。以下の問いに答えよ。

- (1)  $n \geq 2$  のとき,  $a_n > 1$  となることを示せ。
- (2)  $\alpha^2 = \frac{3\alpha + 4}{2\alpha + 3}$  を満たす正の実数  $\alpha$  を求めよ。
- (3) すべての自然数  $n$  に対して  $a_n < \alpha$  となることを示せ。
- (4)  $0 < r < 1$  を満たすある実数  $r$  に対して, 不等式

$$\frac{\alpha - a_{n+1}}{\alpha - a_n} \leq r \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つことを示せ。さらに, 極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めよ。