

入学試験過去問題

数 学

東北大学（理系）

対象年度：2011 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

第 1 問

実数 a に対し，不等式

$$y \leq 2ax - a^2 + 2a + 2$$

の表す座標平面上の領域を $D(a)$ とおく。

- (1) $-1 \leq a \leq 2$ を満たすすべての a に対し $D(a)$ の点となるような点 (p, q) の範囲を図示せよ。
- (2) $-1 \leq a \leq 2$ を満たすいずれかの a に対し $D(a)$ の点となるような点 (p, q) の範囲を図示せよ。

第 2 問

a を実数とする。円 C は点 $(a, -a)$ で直線 $y = -x$ を接線にもち、点 $(0, 1)$ を通るものとする。 C の中心を $P(X, Y)$ として、以下の問いに答えよ。

- (1) X, Y を a を用いて表せ。
- (2) a が動くときの点 P の軌跡と直線 $y = 1$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

第 3 問

先生と 3 人の生徒 A, B, C がおり、玉の入った箱がある。箱の中には最初、赤玉 3 個、白玉 7 個、全部で 10 個の玉が入っている。先生がサイコロをふって、1 の目が出たら A が、2 または 3 の目が出たら B が、その他の目が出たら C が箱の中から 1 つだけ玉を取り出す操作を行う。取り出した玉は箱の中に戻さず、取り出した生徒のものとする。この操作を続けて行うものとして以下の問いに答えよ。

ただし、サイコロの 1 から 6 の目の出る確率は等しいものとし、また、箱の中のそれぞれの玉の取り出される確率は等しいものとする。

- (1) 2 回目の操作が終わったとき、A が 2 個の赤玉を手に入れている確率を求めよ。
- (2) 2 回目の操作が終わったとき、B が少なくとも 1 個の赤玉を手に入れている確率を求めよ。
- (3) 3 回目の操作で、C が赤玉を取り出す確率を求めよ。

第 4 問

平面上に長さ 3 の線分 OA を考え、ベクトル $\overrightarrow{OA}$ を $\vec{a}$ で表す。 $0 < t < 1$ を満たす実数 t に対して、 $\overrightarrow{OP} = t\vec{a}$ となるように点 P を定める。大きさ 2 のベクトル $\vec{b}$ を $\vec{a}$ と角 θ ($0 < \theta < \pi$) をなすようにとり、点 B を $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ で定める。線分 OB の中点を Q とし、線分 AQ と線分 BP の交点を R とする。

このとき、どのように θ をとっても $\overrightarrow{OR}$ と $\overrightarrow{AB}$ が垂直にならないような t の値の範囲を求めよ。

第 5 問

a を実数, z を 0 でない複素数とする。 z と共役な複素数を $\bar{z}$ で表す。

- (1) 次を満たす z を求めよ。

$$z + 1 - \frac{a}{z} = 0$$

- (2) 次を満たす z が存在するような a の範囲を求めよ。

$$\bar{z} + 1 - \frac{a}{z} = 0$$

- (3) 次を満たす z が存在するような a の範囲を求めよ。

$$z(\bar{z})^2 + \bar{z} - \frac{a}{z} = 0$$

第 6 問

行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

の表す 1 次変換を f とする。 f による点 $P(1, 1)$ の像を P_1 とする。正の整数 n に対し、 P_n の f による像を P_{n+1} とする。 P_n が点 $Q(10, 10)$ に最も近くなるときの n の値を求めよ。