

入学試験過去問題

数 学

東北大学（理系）

対象年度：2010 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

第 1 問

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$ とする。 $y < x < a$ を満たすすべての x, y に対して

$$f(x) > \frac{(x-y)f(a) + (a-x)f(y)}{a-y}$$

が成り立つような a の範囲を求めよ。

第 2 問

a, b を正の実数とする。曲線 $C: y = x^3 - a^2x + a^3$ と点 $P(b, 0)$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 P から曲線 C に接線がちょうど 3 本引けるような点 (a, b) の存在する領域を図示せよ。
- (2) 点 P から曲線 C に接線がちょうど 2 本引けるとする。2 つの接点を A, B としたとき、 $\angle APB$ が 90° より小さくなるための a と b の条件を求めよ。

第 3 問

1, 2, 3, 4 の数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードを用いて, 次の手順で 5 桁の整数をつくる。まず 1 枚を取り出して現れた数字を 1 の位とする。取り出した 1 枚を元に戻し, 4 枚のカードをよく混ぜて, 再び 1 枚を取り出して現れた数字を 10 の位とする。このような操作を 5 回繰り返して, 5 桁の整数をつくる。得られた整数を X とするとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) X に数字 1 がちょうど 2 回現れる確率を求めよ。
- (2) X に数字 1 と数字 2 がちょうど 1 回ずつ現れる確率を求めよ。
- (3) X にちょうど 2 回現れる数字が 1 種類以上ある確率を求めよ。

第 4 問

四面体 ABCD において、辺 AB の中点を M、辺 CD の中点を N とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 等式

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}$$

を満たす点 P は存在するか。証明をつけて答えよ。

- (2) 点 Q が等式

$$|\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB}| = |\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD}|$$

を満たしながら動くとき、点 Q が描く図形を求めよ。

- (3) 点 R が等式

$$|\overrightarrow{RA}|^2 + |\overrightarrow{RB}|^2 = |\overrightarrow{RC}|^2 + |\overrightarrow{RD}|^2$$

を満たしながら動くとき、内積 $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MR}$ は R のとり方によらず一定であることを示せ。

- (4) (2) の点 Q が描く図形と (3) の点 R が描く図形が一致するための必要十分条件は $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ であることを示せ。

第 5 問

$0 < t < 3$ のとき, 連立不等式

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq \sin x \\ 0 \leq x \leq t - y \end{cases}$$

の表す領域を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を $V(t)$ とする。 $\frac{d}{dt}V(t) = \frac{\pi}{4}$ となる t と, そのときの $V(t)$ の値を求めよ。

第 6 問

xy 平面において、原点を中心とし $P(1, 0)$ を頂点の 1 つとする正 6 角形を X とする。 A を 2 次の正方行列とし、 X の各頂点 (x, y) に対して、行列 A の表す移動

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で得られる点 (x', y') は X の辺上の点 (頂点を含む) であるとする。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 P が行列 A の表す移動で P 自身に移るとき、 X の各頂点は X のいずれかの頂点に移ることを示せ。また、そのときの行列 A を求めよ。
- (2) 点 P が行列 A の表す移動で X のある頂点に移るとき、 X の各頂点は X のいずれかの頂点に移ることを示せ。また、そのときの行列 A を求めよ。