2010年度前期日程入学試験学力検査問題

数　　学〔理系〕

志望学部／学科／専攻	試 験 時 間	指定解答用紙
理系学部	150 分	1 ～ 6

注 意 事 項

1. **試験開始の合図があるまで，この問題冊子，解答用紙を開いてはいけない。**
2. 問題冊子の白紙のページや問題の余白は草案のために使用してよい。なお，ページの脱落，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 解答は，必ず**黒鉛筆**（シャープペンシルも可）で記入し，ボールペン・万年筆などを使用してはいけない。
4. **解答用紙の受験記号番号欄（1 枚につき 2 か所）には，忘れずに受験票と同じ受験記号番号をはっきりと判読できるように記入すること。**
5. 解答は，必ず**解答用紙の指定された箇所**に記入すること。
6. **解答用紙を持ち帰ってはいけない。**
7. 試験終了後，この問題冊子は持ち帰ること。

―――このページは白紙―――

―――このページは白紙―――

$\boxed{1}$ $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$ とする。$y < x < a$ を満たすすべての x，y に対して

$$f(x) > \frac{(x-y)f(a) + (a-x)f(y)}{a-y}$$

が成り立つような a の範囲を求めよ。

$\boxed{2}$ a，b を正の実数とする。曲線 $C : y = x^3 - a^2x + a^3$ と点 $\mathrm{P}\,(b,\ 0)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 点 P から曲線 C に接線がちょうど 3 本引けるような点 $(a,\ b)$ の存在する領域を図示せよ。

(2) 点 P から曲線 C に接線がちょうど 2 本引けるとする。2 つの接点を A，B としたとき，$\angle\mathrm{APB}$ が 90° より小さくなるための a と b の条件を求めよ。

$\boxed{3}$ 1，2，3，4 の数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードを用いて，次の手順で 5 桁の整数をつくる。まず 1 枚を取り出して現れた数字を 1 の位とする。取り出した 1 枚を元に戻し，4 枚のカードをよく混ぜて，再び 1 枚を取り出して現れた数字を 10 の位とする。このような操作を 5 回繰り返して，5 桁の整数をつくる。得られた整数を X とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) X に数字 1 がちょうど 2 回現れる確率を求めよ。

(2) X に数字 1 と数字 2 がちょうど 1 回ずつ現れる確率を求めよ。

(3) X にちょうど 2 回現れる数字が 1 種類以上ある確率を求めよ。

$\boxed{4}$ 四面体 ABCD において，辺 AB の中点を M，辺 CD の中点を N とする。以下の問いに答えよ。

(1) 等式

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}$$

を満たす点 P は存在するか。証明をつけて答えよ。

(2) 点 Q が等式

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{QA}}+\overrightarrow{\mathrm{QB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{QC}}+\overrightarrow{\mathrm{QD}}\right|$$

を満たしながら動くとき，点 Q が描く図形を求めよ。

(3) 点 R が等式

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{RA}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{RB}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{RC}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{RD}}\right|^2$$

を満たしながら動くとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MR}}$ は R のとり方によらず一定であることを示せ。

(4) (2) の点 Q が描く図形と (3) の点 R が描く図形が一致するための必要十分条件は $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|$ であることを示せ。

$\boxed{5}$ $0 < t < 3$ のとき，連立不等式

$$\begin{cases} 0 \leqq y \leqq \sin x \\ 0 \leqq x \leqq t - y \end{cases}$$

の表す領域を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を $V(t)$ とする。$\dfrac{d}{dt}V(t) = \dfrac{\pi}{4}$ となる t と，そのときの $V(t)$ の値を求めよ。

$\boxed{6}$ xy 平面において，原点を中心とし $\mathrm{P}\,(1,\ 0)$ を頂点の 1 つとする正 6 角形を X とする。A を 2 次の正方行列とし，X の各頂点 $(x,\ y)$ に対して，行列 A の表す移動

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で得られる点 $(x',\ y')$ は X の辺上の点 (頂点を含む) であるとする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 P が行列 A の表す移動で P 自身に移るとき，X の各頂点は X のいずれかの頂点に移ることを示せ。また，そのときの行列 A を求めよ。

(2) 点 P が行列 A の表す移動で X のある頂点に移るとき，X の各頂点は X のいずれかの頂点に移ることを示せ。また，そのときの行列 A を求めよ。