

入学試験過去問題

数 学

東北大学（理系）

対象年度：2008 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

第 1 問

多項式 $f(x)$ について、次の条件 (i), (ii), (iii) を考える。

(i) $x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$

(ii) $f(1-x) = f(x)$

(iii) $f(1) = 1$

このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 条件 (i) をみたす多項式 $f(x)$ の次数は 4 以下であることを示せ。

(2) 条件 (i), (ii), (iii) をすべてみたす多項式 $f(x)$ を求めよ。

第 2 問

n を 2 以上の自然数とする。平面上の $\triangle OA_1A_2$ は $\angle OA_2A_1 = 90^\circ$, $OA_1 = 1$, $A_1A_2 = \frac{1}{\sqrt{n}}$ をみたすとする。 A_2 から OA_1 へ垂線をおろし, 交点を A_3 とする。 A_3 から OA_2 へ垂線をおろし, 交点を A_4 とする。以下同様に, $k = 4, 5, \dots$ について, A_k から OA_{k-1} へ垂線をおろし, 交点を A_{k+1} として, 順番に $A_5, A_6, \dots$ を定める。 $\overrightarrow{h_k} = \overrightarrow{A_kA_{k+1}}$ とおくと, 以下の問いに答えよ。

- (1) $k = 1, 2, \dots$ のとき, ベクトル $\overrightarrow{h_k}$ と $\overrightarrow{h_{k+1}}$ の内積 $\overrightarrow{h_k} \cdot \overrightarrow{h_{k+1}}$ を n と k で表せ。
- (2) $S_n = \sum_{k=1}^n \overrightarrow{h_k} \cdot \overrightarrow{h_{k+1}}$ とおくと, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。ここで, 自然対数の底 e について, $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ であることを用いてもよい。

第 3 問

θ を $0 < \theta < \frac{2\pi}{3}$ の範囲にある実数とし、空間の 4 点 O, A, B, C が、 $OA = OB = OC = 1$ かつ $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = \theta$ をみたすとする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $\triangle ABC$ の重心を G とするとき、 AG と OG をそれぞれ θ で表せ。
- (2) θ を動かしたとき、 O, A, B, C を頂点とする四面体の体積の最大値を求めよ。

第 4 問

点 P が次のルール (i), (ii) に従って数直線上を移動するものとする。

- (i) 1, 2, 3, 4, 5, 6 の目が同じ割合で出るサイコロを振り、出た目の数を k とする。
P の座標 a について, $a > 0$ ならば座標 $a - k$ の点へ移動し, $a < 0$ ならば座標 $a + k$ の点へ移動する。
- (ii) 原点に移動したら終了し, そうでなければ (i) を繰り返す。

このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) P の座標が 1, 2, ..., 6 のいずれかであるとき, ちょうど 3 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。
- (2) P の座標が 1, 2, ..., 6 のいずれかであるとき, ちょうど m 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。
- (3) P の座標が 8 であるとき, ちょうど n 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。

第 5 問

a を実数として、2 次の正方行列 A, B を次のように定める。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & -a \end{pmatrix}$$

このとき、 $((\cos t)A + (\sin t)B)^2 = O$ をみたす実数 t が存在するような a の範囲を求めよ。ただし、 O は零行列とする。

第 6 問

$k > 1$ として, $f(x) = x^2 + 2kx$ とおく。曲線 $y = f(x)$ と円 $C : x^2 + y^2 = 1$ の 2 つの交点の中で, 第 1 象限にあるものを P とし, 第 3 象限にあるものを Q とする。点 $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(-1, 0)$ に対して, $\alpha = \angle AOP$, $\beta = \angle BOQ$ とおくと, 以下の問いに答えよ。

- (1) k を α で表せ。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ と円 C で囲まれる 2 つの図形の中で, $y = f(x)$ の上側にあるものの面積 $S(k)$ を α と β で表せ。
- (3) $\lim_{k \rightarrow \infty} S(k)$ を求めよ。