2008年度前期日程入学試験学力検査問題

数　　学〔理系〕

志望学部／学科／専攻	試 験 時 間	指定解答用紙
理系学部	150 分	1 ～ 6

注 意 事 項

1. **試験開始の合図があるまで，この問題冊子，解答用紙を開いてはいけない。**
2. 問題冊子の白紙のページや問題の余白は草案のために使用してよい。なお，ページの脱落，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 解答は，必ず**黒鉛筆**（シャープペンシルも可）で記入し，ボールペン・万年筆などを使用してはいけない。
4. **解答用紙の受験記号番号欄（1 枚につき 2 か所）には，忘れずに受験票と同じ受験記号番号をはっきりと判読できるように記入すること。**
5. 解答は，必ず**解答用紙の指定された箇所**に記入すること。
6. **解答用紙を持ち帰ってはいけない。**
7. 試験終了後，この問題冊子は持ち帰ること。

―――このページは白紙―――

―――このページは白紙―――

$\boxed{1}$ 多項式 $f(x)$ について，次の条件 (i)，(ii)，(iii) を考える。

(i) $x^4 f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$

(ii) $f(1-x) = f(x)$

(iii) $f(1) = 1$

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 条件 (i) をみたす多項式 $f(x)$ の次数は 4 以下であることを示せ。

(2) 条件 (i)，(ii)，(iii) をすべてみたす多項式 $f(x)$ を求めよ。

$\boxed{2}$ n を 2 以上の自然数とする。平面上の $\triangle \mathrm{OA_1A_2}$ は $\angle \mathrm{OA_2A_1} = 90^\circ$，$\mathrm{OA_1} = 1$，$\mathrm{A_1A_2} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ をみたすとする。$\mathrm{A_2}$ から $\mathrm{OA_1}$ へ垂線をおろし，交点を $\mathrm{A_3}$ とする。$\mathrm{A_3}$ から $\mathrm{OA_2}$ へ垂線をおろし，交点を $\mathrm{A_4}$ とする。以下同様に，$k = 4, 5, \ldots$ について，$\mathrm{A_k}$ から $\mathrm{OA_{k-1}}$ へ垂線をおろし，交点を $\mathrm{A_{k+1}}$ として，順番に $\mathrm{A_5}, \mathrm{A_6}, \ldots$ を定める。$\overrightarrow{h_k} = \overrightarrow{\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}}$ とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1) $k = 1, 2, \ldots$ のとき，ベクトル $\overrightarrow{h_k}$ と $\overrightarrow{h_{k+1}}$ の内積 $\overrightarrow{h_k} \cdot \overrightarrow{h_{k+1}}$ を n と k で表せ。

(2) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{h_k} \cdot \overrightarrow{h_{k+1}}$ とおくとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。ここで，自然対数の底 e について，$e = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ であることを用いてもよい。

$\boxed{3}$ θ を $0 < \theta < \dfrac{2\pi}{3}$ の範囲にある実数とし，空間の 4 点 O，A，B，C が，$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = 1$ かつ $\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{BOC} = \angle\mathrm{COA} = \theta$ をみたすとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心を G とするとき，AG と OG をそれぞれ θ で表せ。

(2) θ を動かしたとき，O，A，B，C を頂点とする四面体の体積の最大値を求めよ。

$\boxed{4}$ 点 P が次のルール (i)，(ii) に従って数直線上を移動するものとする。

(i) 1，2，3，4，5，6 の目が同じ割合で出るサイコロを振り，出た目の数を k とする。P の座標 a について，$a > 0$ ならば座標 $a - k$ の点へ移動し，$a < 0$ ならば座標 $a + k$ の点へ移動する。

(ii) 原点に移動したら終了し，そうでなければ (i) を繰り返す。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) P の座標が 1，2，…，6 のいずれかであるとき，ちょうど 3 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。

(2) P の座標が 1，2，…，6 のいずれかであるとき，ちょうど m 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。

(3) P の座標が 8 であるとき，ちょうど n 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。

$\boxed{5}$ a を実数として，2 次の正方行列 A，B を次のように定める。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & -a \end{pmatrix}$$

このとき，$((\cos t)A + (\sin t)B)^2 = O$ をみたす実数 t が存在するような a の範囲を求めよ。ただし，O は零行列とする。

$\boxed{6}$ $k > 1$ として，$f(x) = x^2 + 2kx$ とおく。曲線 $y = f(x)$ と円 $C : x^2 + y^2 = 1$ の 2 つの交点の内で，第 1 象限にあるものを P とし，第 3 象限にあるものを Q とする。点 O $(0,\ 0)$，A $(1,\ 0)$，B $(-1,\ 0)$ に対して，$\alpha = \angle\mathrm{AOP}$，$\beta = \angle\mathrm{BOQ}$ とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1) k を α で表せ。

(2) 曲線 $y = f(x)$ と円 C で囲まれる 2 つの図形の内で，$y = f(x)$ の上側にあるものの面積 $S(k)$ を α と β で表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} S(k)$ を求めよ。