

入学試験過去問題

数 学

東北大学（理系）

対象年度：2007 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

第 1 問

n を 2 以上の自然数とし, 整式 x^n を $x^2 - 6x - 12$ で割った余りを $a_n x + b_n$ とする。

- (1) a_2, b_2 を求めよ。
- (2) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n と b_n を用いて表せ。
- (3) 各 n に対して, a_n と b_n の公約数で素数となるものをすべて求めよ。

第 2 問

$\angle C$ を直角とする直角三角形 ABC に対して、 $\angle A$ の二等分線と線分 BC の交点を D とする。また、線分 AD , DC , CA の長さはそれぞれ 5 , 3 , 4 とする。 $\angle A = \theta$ とおくとき、次の問いに答えよ。

(1) $\sin \theta$ を求めよ。

(2) $\theta < \frac{5}{12}\pi$ を示せ。ただし、 $\sqrt{2} = 1.414\cdots$, $\sqrt{3} = 1.732\cdots$ を用いてもよい。

第 3 問

自然数 n に対し, 方程式

$$\frac{1}{x^n} - \log x - \frac{1}{e} = 0$$

を考える。ただし, 対数は自然対数であり, e はその底とする。

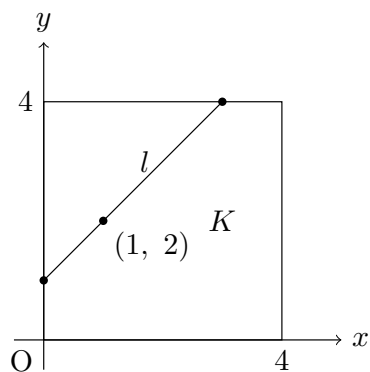
- (1) 上の方程式は $x \geq 1$ にただ一つの解をもつことを示せ。
- (2) (1) の解を x_n とする。このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ を示せ。

第 4 問

xy 平面上に 4 点 $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 4)$, $(0, 4)$ を頂点とする正方形 K を考える。点 $(1, 2)$ を通る各直線に対して、その K に含まれる部分を l とおく。

(1) l の長さの最大値と、それを与える直線の方程式を求めよ。

(2) l の長さの最小値を求めよ。



第 5 問

xyz 空間において、点 $(1, 0, 1)$ と点 $(1, 0, 2)$ を結ぶ線分を l とし、 l を z 軸のまわりに一回転してできる図形を A とする。 A を x 軸のまわりに一回転してできる立体の体積を求めよ。

第 6 問

$a > 0$ に対し

$$I_0(a) = \int_0^a \sqrt{1+x} \, dx, \quad I_n(a) = \int_0^a x^n \sqrt{1+x} \, dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とおく。

(1) $\lim_{a \rightarrow \infty} a^{-\frac{3}{2}} I_0(a)$ を求めよ。

(2) 漸化式

$$I_n(a) = \frac{2}{3+2n} a^n (1+a)^{\frac{3}{2}} - \frac{2n}{3+2n} I_{n-1}(a) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を示せ。

(3) 自然数 n に対して, $\lim_{a \rightarrow \infty} a^{-(\frac{3}{2}+n)} I_n(a)$ を求めよ。