2007年度前期日程入学試験学力検査問題

数　　学〔理系〕

志望学部／学科／専攻	試 験 時 間	指定解答用紙
理系学部	150 分	1 ～ 6

注 意 事 項

1. **試験開始の合図があるまで，この問題冊子，解答用紙を開いてはいけない。**
2. 問題冊子の白紙のページや問題の余白は草案のために使用してよい。なお，ページの脱落，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 解答は，必ず**黒鉛筆**（シャープペンシルも可）で記入し，ボールペン・万年筆などを使用してはいけない。
4. **解答用紙の受験記号番号欄（1 枚につき 2 か所）には，忘れずに受験票と同じ受験記号番号をはっきりと判読できるように記入すること。**
5. 解答は，必ず**解答用紙の指定された箇所**に記入すること。
6. **解答用紙を持ち帰ってはいけない。**
7. 試験終了後，この問題冊子は持ち帰ること。

―――このページは白紙―――

―――このページは白紙―――

$\boxed{1}$ n を 2 以上の自然数とし，整式 x^n を $x^2-6x-12$ で割った余りを a_nx+b_n とする。

(1) a_2，b_2 を求めよ。

(2) a_{n+1}，b_{n+1} を a_n と b_n を用いて表せ。

(3) 各 n に対して，a_n と b_n の公約数で素数となるものをすべて求めよ。

$\boxed{2}$ $\angle$C を直角とする直角三角形 ABC に対して，$\angle$A の二等分線と線分 BC の交点を D とする。また，線分 AD，DC，CA の長さはそれぞれ 5，3，4 とする。$\angle\mathrm{A}=\theta$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) $\sin\theta$ を求めよ。

(2) $\theta<\dfrac{5}{12}\pi$ を示せ。ただし，$\sqrt{2}=1.414\cdots$，$\sqrt{3}=1.732\cdots$ を用いてもよい。

$\boxed{3}$ 自然数 n に対し，方程式

$$\frac{1}{x^n} - \log x - \frac{1}{e} = 0$$

を考える。ただし，対数は自然対数であり，e はその底とする。

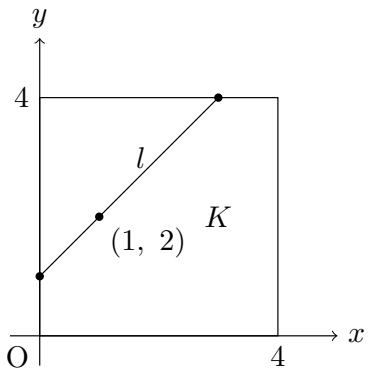
(1) 上の方程式は $x \geqq 1$ にただ一つの解をもつことを示せ。

(2) (1) の解を x_n とする。このとき，$\lim_{n \to \infty} x_n = 1$ を示せ。

$\boxed{4}$ xy 平面上に 4 点 $(0,\ 0)$，$(4,\ 0)$，$(4,\ 4)$，$(0,\ 4)$ を頂点とする正方形 K を考える。点 $(1,\ 2)$ を通る各直線に対して，その K に含まれる部分を l とおく。

(1) l の長さの最大値と，それを与える直線の方程式を求めよ。

(2) l の長さの最小値を求めよ。



$\boxed{5}$ xyz 空間において，点 $(1,\ 0,\ 1)$ と点 $(1,\ 0,\ 2)$ を結ぶ線分を l とし，l を z 軸のまわりに一回転してできる図形を A とする。A を x 軸のまわりに一回転してできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{6}$ $a > 0$ に対し

$$I_0(a) = \int_0^a \sqrt{1+x}\,dx, \quad I_n(a) = \int_0^a x^n\sqrt{1+x}\,dx \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

とおく。

(1) $\displaystyle\lim_{a\to\infty} a^{-\frac{3}{2}} I_0(a)$ を求めよ。

(2) 漸化式

$$I_n(a) = \frac{2}{3+2n}a^n(1+a)^{\frac{3}{2}} - \frac{2n}{3+2n}I_{n-1}(a) \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

を示せ。

(3) 自然数 n に対して，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)} I_n(a)$ を求めよ。