

入学試験過去問題

数 学

東北大学（理系）

対象年度：2006 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

第 1 問

連立不等式

$$x^2 - 6x + y^2 + 5 \leq 0, \quad x + y \leq 5$$

の表す領域 D を図示せよ。また、曲線

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2y + a^2 = 0$$

が D の点を通るような実数 a の最大値と最小値を求めよ。

第 2 問

図-1 のような $AB = BC = CD = DA = AC = 1$ である四角形 $ABCD$ を考える。この四角形 $ABCD$ を AC で折り、図-2 のように点 B, C, D が平面 P にのるように置く。図-2 に現れる辺 CB と辺 CD とがなす角を α , $\alpha = \angle BCD$, とし $0^\circ < \alpha < 120^\circ$ とする。以下の問に答えよ。

- (1) 図-2 において、 A から平面 P に下ろした垂線が P と交わる点を H とする。 $\overrightarrow{AH}$ を $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$ と α とで表せ。
- (2) $\overrightarrow{AH}$ の長さを α を用いて表せ。
- (3) H が図-2 における $\triangle BCD$ の重心となるとき、の角度 α を求めよ。

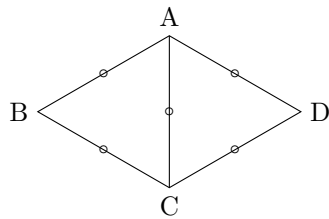


図-1

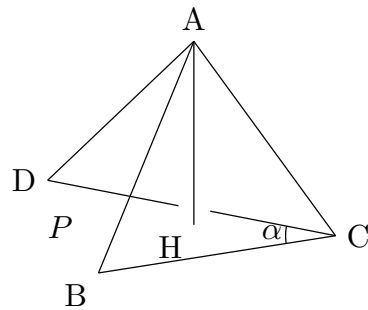


図-2

第 3 問

ある商店街が次のようなくじを計画した。商店街の各商店は 1000 円の買い物ごとに 1 枚の抽選券を客に配布し、また、配布した抽選券 1 枚につき手数料 35 円をくじを管理する組合に拠出する。客は抽選券の枚数と同じ回数のかくじを引くことができる。くじは 500 個の球の入った袋をよくかきまぜて 1 個を取り出す方法で行われ、500 個の球のうち 1 個だけが当たりとし、取り出された球はそのつど袋に戻すことにする。そして、当たり球が出たならば 1 万円相当の景品がもらえ、外れたならば景品は無いことにする。以下の問に答えよ。

- (1) 10 枚の抽選券を使ってくじを引く人がもらえる景品の相当額の期待値を求めよ。
- (2) それぞれが 4 枚の抽選券を使ってくじを引く客が 2 人いるとする。各人が 4 回のかくじを引いたとき、当たり外れの順序が完全に一致する確率を求めよ。ただし、小数点第 3 位は四捨五入せよ。
- (3) くじに要する経費は、抽選券の配布枚数に関係のない管理運営費 30 万円と景品代との合計であるとする。くじ管理組合に拠出されたお金でくじに要する経費の期待値がまかなえるためには、商店街全体としての商品売り上げ目標をいくら以上にすればよいか。

第 4 問

$x > 0$ において、関数

$$f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$$

を考える。関数 $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ と書くことにし、以下の問に答えよ。

- (1) $f'(2)$ を求め、 $x > 2$ のとき $f'(x) < 1$ であることを示せ。
- (2) k が自然数のとき、 $f'\left(\frac{1}{k}\right)$ を求めよ。
- (3) $f'(x) = 1$ となる x を値の大きいものから順に $x_1, x_2, x_3, \dots$ とおく。 $n \geq 2$ である自然数 n に対して、 $\frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n-1}$ を示せ。
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ を求めよ。

第 5 問

3 次正方行列 A , B , O を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とする。以下の問に答えよ。

- (1) 2 以上の自然数 k に対して, $(A+B)^k$ を求めよ。
- (2) すべての自然数 m, n に対して, $A^m B^n$ および $B^n A^m$ を求めよ。
- (3) 等式 $(A+B)X = X(A+B) = O$ を満たす 3 次正方行列

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

を求めよ。

第 6 問

連立不等式 $1 \leq x \leq 2$, $y \leq 0$ が表す xy 平面内の領域を D とする。また, a を定数とし, 不等式 $y \geq x^2 - 3ax + 2a^2$ が表す xy 平面内の領域を E とする。以下の問に答えよ。

- (1) D と E とが共有点をもつような実数 a の範囲を求めよ。
- (2) (1) の範囲の a に対して, D と E との共通部分の面積 $S(a)$ を求めよ。
- (3) (2) で求めた $S(a)$ の最大値を求めよ。