

入学試験過去問題

数 学

東北大学（理系）

対象年度：2005 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

第 1 問

$0 < t < \frac{1}{2}$ とし, 平面上のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ と単位ベクトル $\vec{e}$ が

(i) $(1-t)\vec{a} + t\vec{b} = \vec{e}$

(ii) $(1-t)(\vec{a} + \vec{e}) = t(\vec{b} + \vec{e})$

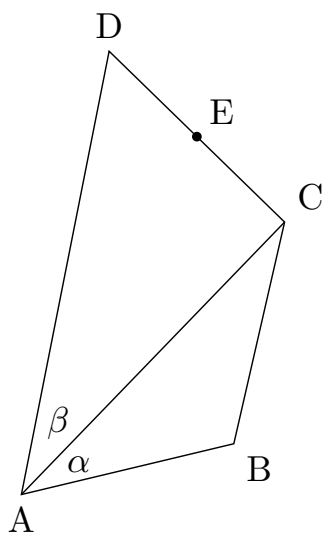
を満たすとする。さらに平面上のベクトル $\vec{x}$ があって, $\vec{x} - \vec{a}$ と $\vec{x} - \vec{b}$ が垂直で長さの比が $t : 1 - t$ となるとする。このとき, 内積 $\vec{x} \cdot \vec{e}$ を t で表せ。

第 2 問

すべての内角が 180° より小さい四角形 $ABCD$ がある。辺の長さが $AB = BC = r$, $AD = 2r$ とする。さらに, 辺 CD 上に点 E があり, 3 つの三角形 $\triangle ABC$, $\triangle ACE$, $\triangle ADE$ の面積はすべて等しいとする。 $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle CAD$ とおく。

(1) $\alpha = \beta$ を示せ。

(2) $\cos \angle DAB = \frac{3}{5}$ であるとするとき, $\sin \angle CAE$ の値を求めよ。



第 3 問

1 から n までの数字を 1 つずつ書いた n 枚のカードが箱に入っている。この箱から無作為にカードを 1 枚取り出して数字を記録し、箱に戻すという操作を繰り返す。ただし、 k 回目の操作で直前のカードと同じ数字か直前のカードよりも小さい数字のカードを取り出した場合に、 k を得点として終了する。

- (1) $2 \leq k \leq n+1$ を満たす自然数 k について、得点が k となる確率を求めよ。
- (2) 得点の期待値を n で表した式を $f(n)$ とするとき、 $f(n)$ および極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ を求めよ。

第 4 問

a を負の実数とし、放物線 $C_1 : y = ax^2 + bx + c$ を考える。 C_1 が曲線

$$C_2 : y = \begin{cases} x^2 - x + \frac{3}{4} & (x > 0 \text{ のとき}) \\ x^2 + 2x + \frac{3}{4} & (x \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と 2 点で接するとき、 C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を a で表せ。

第 5 問

a, b を $a^2 \neq b^2$ を満たす 0 でない実数とし, A_n を次の関係式で定まる 2 次の正方行列とする。

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & a^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{n+1} \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1) 行列 $C = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ で

$$C \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を満たすものを求めよ。

(2) A_n を a, b, n で表せ。

(3) $n \rightarrow \infty$ のとき A_n のすべての成分が収束するための条件を求めよ。

第 6 問

a を $0 < a < 1$ を満たす定数とし,

$$f(x) = \frac{\cos 2x - 2}{a \cos x + 1}$$

とする。

- (1) $f(x)$ が $0 \leq x \leq \pi$ で減少関数となる a の範囲を求めよ。
- (2) $f(x)$ の $0 \leq x \leq \pi$ における最大値は $f(0)$ であることを示せ。