2005年度前期日程入学試験学力検査問題

数　　学〔理系〕

志望学部／学科／専攻	試 験 時 間	指定解答用紙
理系学部	150 分	1 ～ 6

注 意 事 項

1. **試験開始の合図があるまで，この問題冊子，解答用紙を開いてはいけない。**
2. 問題冊子の白紙のページや問題の余白は草案のために使用してよい。なお，ページの脱落，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 解答は，必ず**黒鉛筆**（シャープペンシルも可）で記入し，ボールペン・万年筆などを使用してはいけない。
4. **解答用紙の受験記号番号欄（1 枚につき 2 か所）には，忘れずに受験票と同じ受験記号番号をはっきりと判読できるように記入すること。**
5. 解答は，必ず**解答用紙の指定された箇所**に記入すること。
6. **解答用紙を持ち帰ってはいけない。**
7. 試験終了後，この問題冊子は持ち帰ること。

―――このページは白紙―――

―――このページは白紙―――

$\boxed{1}$ $0 < t < \dfrac{1}{2}$ とし，平面上のベクトル $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ と単位ベクトル $\overrightarrow{e}$ が

(i) $(1-t)\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b} = \overrightarrow{e}$

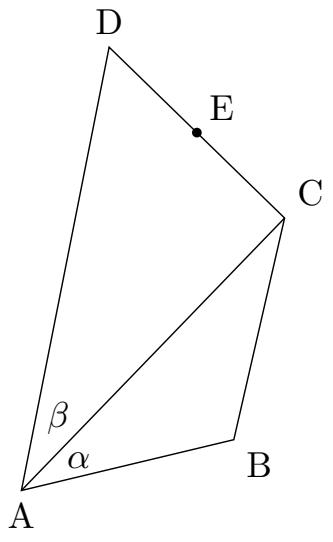
(ii) $(1-t)(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{e}) = t(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{e})$

を満たすとする。さらに平面上のベクトル $\overrightarrow{x}$ があって，$\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{b}$ が垂直で長さの比が $t : 1-t$ となるとする。このとき，内積 $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{e}$ を t で表せ。

$\boxed{2}$ すべての内角が 180° より小さい四角形 ABCD がある。辺の長さが $\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = r$，$\mathrm{AD} = 2r$ とする。さらに，辺 CD 上に点 E があり，3 つの三角形 $\triangle\mathrm{ABC}$，$\triangle\mathrm{ACE}$，$\triangle\mathrm{ADE}$ の面積はすべて等しいとする。$\alpha = \angle\mathrm{BAC}$，$\beta = \angle\mathrm{CAD}$ とおく。

(1) $\alpha = \beta$ を示せ。

(2) $\cos\angle\mathrm{DAB} = \dfrac{3}{5}$ であるとするとき，$\sin\angle\mathrm{CAE}$ の値を求めよ。



$\boxed{3}$ 1からnまでの数字を1つずつ書いたn枚のカードが箱に入っている。この箱から無作為にカードを1枚取り出して数字を記録し，箱に戻すという操作を繰り返す。ただし，k回目の操作で直前のカードと同じ数字か直前のカードよりも小さい数字のカードを取り出した場合に，kを得点として終了する。

(1) $2 \leqq k \leqq n+1$を満たす自然数kについて，得点がkとなる確率を求めよ。

(2) 得点の期待値をnで表した式を$f(n)$とするとき，$f(n)$および極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(n)$を求めよ。

$\boxed{4}$ aを負の実数とし，放物線$C_1 : y = ax^2 + bx + c$を考える。C_1が曲線

$$C_2 : y = \begin{cases} x^2 - x + \dfrac{3}{4} & (x > 0 \text{ のとき}) \\ x^2 + 2x + \dfrac{3}{4} & (x \leqq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と2点で接するとき，C_1とC_2で囲まれた図形の面積をaで表せ。

$\boxed{5}$ a，b を $a^2 \neq b^2$ を満たす 0 でない実数とし，A_n を次の関係式で定まる 2 次の正方行列とする。

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & a^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{n+1}\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (n = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots)$$

(1) 行列 $C = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ で

$$C\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を満たすものを求めよ。

(2) A_n を a，b，n で表せ。

(3) $n \to \infty$ のとき A_n のすべての成分が収束するための条件を求めよ。

$\boxed{6}$ a を $0 < a < 1$ を満たす定数とし，

$$f(x) = \frac{\cos 2x - 2}{a\cos x + 1}$$

とする。

(1) $f(x)$ が $0 \leqq x \leqq \pi$ で減少関数となる a の範囲を求めよ。

(2) $f(x)$ の $0 \leqq x \leqq \pi$ における最大値は $f(0)$ であることを示せ。