

入学試験過去問題

数 学

東北大学（理系）

対象年度：2004年

試験時間：150分

問題数：6問

第 1 問

平面ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ は

$$|\vec{a}|^2 = 1, \quad |\vec{b}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 = \frac{1}{2}$$

を満たすとする。

- (1) k, l を整数とする。 $|k\vec{a} + l\vec{b}|^2$ が整数であるための必要十分条件は l が偶数であることを示せ。
- (2) $|k\vec{a} + l\vec{b}|^2 = 0$ となる整数の組 (k, l) をすべて求めよ。
- (3) 整数の組 (k, l) を条件 $(k, l) \neq (0, 0)$ のもとで動かすとき, $|k\vec{a} + l\vec{b}|^2$ の最小値を与える (k, l) をすべて求めよ。

第 2 問

平面上の 3 つの曲線 C_1 , C_2 , C_3 を次で定める。

$$C_1 : \begin{cases} x = \frac{15}{2}t^4 \\ y = -3t^5 + 5t^3 \end{cases} \quad \left(0 \leq t \leq \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$$

$$C_2 : \begin{cases} x = \frac{125}{6} \cos^3 \left(2\pi \left(-t + \sqrt{\frac{5}{3}} \right) \right) \\ y = \frac{125}{6} \sin^3 \left(2\pi \left(-t + \sqrt{\frac{5}{3}} \right) \right) \end{cases} \quad \left(\sqrt{\frac{5}{3}} \leq t \leq \sqrt{\frac{5}{3}} + \frac{1}{4} \right)$$

$$C_3 : \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{125(t-2)}{6 \left(\frac{7}{4} - \sqrt{\frac{5}{3}} \right)} \end{cases} \quad \left(\sqrt{\frac{5}{3}} + \frac{1}{4} \leq t \leq 2 \right)$$

- (1) C_1 と x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。
- (2) 原点 O を出発し, C_1 , C_2 , C_3 を順にたどって O に戻る行程の道のりを求めよ。

第 3 問

n を自然数とする。 $n + 1$ 項の等差数列 $x_0, x_1, \dots, x_n$ と等比数列 $y_0, y_1, \dots, y_n$ が

$$1 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 2$$

$$1 = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = 2$$

を満たすとし、 $P(n)$, $Q(n)$, $R(n)$, $S(n)$ を次で定める。

$$P(n) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad Q(n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

$$R(n) = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}, \quad S(n) = \sqrt[n]{y_1 y_2 \dots y_n}$$

このとき極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} Q(n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} R(n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S(n)$ をそれぞれ求めよ。

第 4 問

手作りのサイコロがあり、1 から 6 のそれぞれの目の出る確率を $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ で表す。ここで

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$$

$$p_1 = p_6, \quad p_2 = p_5, \quad p_3 = p_4$$

がなりたつとする。このサイコロを 3 回振ったとき出た目の総和が n である確率を $Q(n)$ で表す。

- (1) $Q(5)$ を p_1, p_2 で表せ。
- (2) $p_3 = \frac{1}{6}$ で p_1 と p_2 は不明であるとする。 $Q(7)$ が取り得る最大の値は何か。また、そのときの p_1, p_2 を求めよ。

第 5 問

z を絶対値が 1 の複素数とする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) $z^3 - z$ の実部が 0 となるような z をすべて求めよ。
- (2) $z^5 + z$ の絶対値が 1 となるような z をすべて求めよ。
- (3) n を自然数とする。 $z^n + 1$ の絶対値が 1 となるような z をすべてかけ合わせて得られる複素数を求めよ。

第 6 問

2 次正方行列 A, B を次で定める。

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- (1) 積 AA, BB, AB, BA を計算せよ。
- (2) 集合 $\{A, B\}$ から重複を許していくつか取り出し、いろいろな順番に並べて積を計算する。このようにして得られる行列をすべて求めよ。