

2004 年度前期日程入学試験学力検査問題

数 学 (理系)

志望学部／学科／専攻	試 験 時 間	指定解答用紙
理系学部	150 分	1 ～ 6

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子、解答用紙を開いてはいけない。
2. 問題冊子の白紙のページや問題の余白は草案のために使用してよい。なお、ページの脱落、印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 解答は、必ず黒鉛筆（シャープペンシルも可）で記入し、ボールペン・万年筆などを使用してはいけない。
4. 解答用紙の受験記号番号欄（1 枚につき 2 か所）には、忘れずに受験票と同じ受験記号番号をはっきりと判読できるように記入すること。
5. 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。
6. 解答用紙を持ち帰ってはいけない。
7. 試験終了後、この問題冊子は持ち帰ること。

——このページは白紙——

——このページは白紙——

1 平面ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ は

$$|\vec{a}|^2 = 1, \quad |\vec{b}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 = \frac{1}{2}$$

を満たすとする。

- (1) k, l を整数とする。 $|k\vec{a} + l\vec{b}|^2$ が整数であるための必要十分条件は l が偶数であることを示せ。
- (2) $|k\vec{a} + l\vec{b}|^2 = 0$ となる整数の組 (k, l) をすべて求めよ。
- (3) 整数の組 (k, l) を条件 $(k, l) \neq (0, 0)$ のもとで動かすとき、 $|k\vec{a} + l\vec{b}|^2$ の最小値を与える (k, l) をすべて求めよ。

2 平面上の3つの曲線 C_1, C_2, C_3 を次で定める。

$$C_1 : \begin{cases} x = \frac{15}{2}t^4 \\ y = -3t^5 + 5t^3 \end{cases} \quad \left(0 \leq t \leq \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$$

$$C_2 : \begin{cases} x = \frac{125}{6} \cos^3 \left(2\pi \left(-t + \sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right) \\ y = \frac{125}{6} \sin^3 \left(2\pi \left(-t + \sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right) \end{cases} \quad \left(\sqrt{\frac{5}{3}} \leq t \leq \sqrt{\frac{5}{3}} + \frac{1}{4}\right)$$

$$C_3 : \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{125(t-2)}{6\left(\frac{7}{4} - \sqrt{\frac{5}{3}}\right)} \end{cases} \quad \left(\sqrt{\frac{5}{3}} + \frac{1}{4} \leq t \leq 2\right)$$

- (1) C_1 と x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。
- (2) 原点 O を出発し、 C_1, C_2, C_3 を順にたどって O に戻る行程の道のりを求めよ。

3 n を自然数とする。 $n+1$ 項の等差数列 $x_0, x_1, \dots, x_n$ と等比数列 $y_0, y_1, \dots, y_n$ が

$$1 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 2$$

$$1 = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = 2$$

を満たすとし、 $P(n), Q(n), R(n), S(n)$ を次で定める。

$$P(n) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad Q(n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

$$R(n) = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}, \quad S(n) = \sqrt[n]{y_1 y_2 \dots y_n}$$

このとき極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n), \lim_{n \rightarrow \infty} Q(n), \lim_{n \rightarrow \infty} R(n), \lim_{n \rightarrow \infty} S(n)$ をそれぞれ求めよ。

4 手作りのサイコロがあり、1 から 6 のそれぞれの目の出る確率を $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ で表す。ここで

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$$

$$p_1 = p_6, \quad p_2 = p_5, \quad p_3 = p_4$$

がなりたつとする。このサイコロを 3 回振ったとき出た目の総和が n である確率を $Q(n)$ で表す。

(1) $Q(5)$ を p_1, p_2 で表せ。

(2) $p_3 = \frac{1}{6}$ で p_1 と p_2 は不明であるとする。 $Q(7)$ が取り得る最大の値は何か。また、そのときの p_1, p_2 を求めよ。

5 z を絶対値が 1 の複素数とする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) $z^3 - z$ の実部が 0 となるような z をすべて求めよ。
- (2) $z^5 + z$ の絶対値が 1 となるような z をすべて求めよ。
- (3) n を自然数とする。 $z^n + 1$ の絶対値が 1 となるような z をすべてかけ合わせて得られる複素数を求めよ。

6 2 次正方行列 A, B を次で定める。

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- (1) 積 AA, BB, AB, BA を計算せよ。
- (2) 集合 $\{A, B\}$ から重複を許していくつか取り出し、いろいろな順番に並べて積を計算する。このようにして得られる行列をすべて求めよ。

