

入学試験過去問題

数 学

東北大学（理系）

対象年度：2003 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

第 1 問

実数 a, b, c, d に対し, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく。

(1) $A^2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ のとき, $\alpha\delta - \beta\gamma \geq 0$ を示せ。

(2) A が $A^4 = E$ を満たすならば, $A^2 = E$ または $A^2 = -E$ となることを示せ。

(3) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。 A が $A^2 = -E$ および $BA = -AB$ を満たすとき, b, c, d を a の式で表せ。また, このとき

$$AB = A^m B A^n$$

が成立するような整数の組 (m, n) で $1 \leq m \leq 3$, $1 \leq n \leq 3$ の範囲にあるものをすべて求めよ。

第 2 問

2つの関数を

$$t = \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta,$$

$$y = -4 \cos 3\theta + \cos 2\theta - \sqrt{3} \sin 2\theta + 2 \cos \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta$$

とする。

- (1) $\cos 3\theta$ を t の関数で表せ。
- (2) y を t の関数で表せ。
- (3) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき, y の最大値, 最小値とそのときの θ の値を求めよ。

第 3 問

関数 $f(x) = 4x - x^2$ に対し, 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = c, \quad a_{n+1} = \sqrt{f(a_n)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で与える。ただし, c は $0 < c < 2$ を満たす定数である。

- (1) $a_n < 2, a_n < a_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を示せ。
- (2) $2 - a_{n+1} < \frac{2-c}{2}(2 - a_n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を示せ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

第 4 問

xyz 空間内に 2 点 $P(u, u, 0)$, $Q(u, 0, \sqrt{1-u^2})$ を考える。 u が 0 から 1 まで動くとき, 線分 PQ が通過してできる曲面を S とする。

- (1) 点 $(u, 0, 0)$ ($0 \leq u \leq 1$) と線分 PQ の距離を求めよ。
- (2) 曲面 S を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体の体積を求めよ。

第 5 問

複素数平面上で、相異なる 3 点 $1, \alpha, \alpha^2$ は実軸上に中心をもつ同一円周上にある。このような α の存在する範囲を複素数平面上に図示せよ。さらに、この円の半径を $|\alpha|$ を用いて表せ。

第 6 問

対数は自然対数であり, e はその底とする。関数 $f(x) = (x+1)\log \frac{x+1}{x}$ に対して, 次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ は $x > 0$ で単調減少関数であることを示せ。
- (2) $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$ および $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ を求めよ。
- (3) $f(x) = 2$ を満たす x が $\frac{1}{e^2} < x < 1$ の範囲に存在することを示せ。