

2003 年度前期日程入学試験学力検査問題

数 学 (理系)

志望学部／学科／専攻	試 験 時 間	指定解答用紙
理系学部	150 分	1 ～ 6

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子、解答用紙を開いてはいけない。
2. 問題冊子の白紙のページや問題の余白は草案のために使用してよい。なお、ページの脱落、印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 解答は、必ず黒鉛筆（シャープペンシルも可）で記入し、ボールペン・万年筆などを使用してはいけない。
4. 解答用紙の受験記号番号欄（1 枚につき 2 か所）には、忘れずに受験票と同じ受験記号番号をはっきりと判読できるように記入すること。
5. 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。
6. 解答用紙を持ち帰ってはいけない。
7. 試験終了後、この問題冊子は持ち帰ること。

——このページは白紙——

——このページは白紙——

1 実数 a, b, c, d に対し, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく。

(1) $A^2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ のとき, $\alpha\delta - \beta\gamma \geq 0$ を示せ。

(2) A が $A^4 = E$ を満たすならば, $A^2 = E$ または $A^2 = -E$ となることを示せ。

(3) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。 A が $A^2 = -E$ および $BA = -AB$ を満たすとき, b, c, d を a の式で表せ。また, このとき

$$AB = A^m B A^n$$

が成立するような整数の組 (m, n) で $1 \leq m \leq 3$, $1 \leq n \leq 3$ の範囲にあるものをすべて求めよ。

2 2つの関数を

$$t = \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta,$$

$$y = -4 \cos 3\theta + \cos 2\theta - \sqrt{3} \sin 2\theta + 2 \cos \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta$$

とする。

(1) $\cos 3\theta$ を t の関数で表せ。

(2) y を t の関数で表せ。

(3) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき, y の最大値, 最小値とそのときの θ の値を求めよ。

3 関数 $f(x) = 4x - x^2$ に対し, 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = c, \quad a_{n+1} = \sqrt{f(a_n)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で与える。ただし, c は $0 < c < 2$ を満たす定数である。

(1) $a_n < 2, \quad a_n < a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ を示せ。

(2) $2 - a_{n+1} < \frac{2-c}{2}(2 - a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ を示せ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

4 xyz 空間内に 2 点 $P(u, u, 0), Q(u, 0, \sqrt{1-u^2})$ を考える。 u が 0 から 1 まで動くとき, 線分 PQ が通過してできる曲面を S とする。

(1) 点 $(u, 0, 0) \quad (0 \leq u \leq 1)$ と線分 PQ の距離を求めよ。

(2) 曲面 S を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体の体積を求めよ。

5 複素数平面上で、相異なる3点 $1, \alpha, \alpha^2$ は実軸上に中心をもつ同一円周上にある。このような α の存在する範囲を複素数平面上に図示せよ。さらに、この円の半径を $|\alpha|$ を用いて表せ。

6 対数は自然対数であり、 e はその底とする。関数 $f(x) = (x+1) \log \frac{x+1}{x}$ に対して、次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ は $x > 0$ で単調減少関数であることを示せ。

(2) $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$ および $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ を求めよ。

(3) $f(x) = 2$ を満たす x が $\frac{1}{e^2} < x < 1$ の範囲に存在することを示せ。

