

入学試験過去問題

数 学

東北大学（理系）

対象年度：2002年

試験時間：150分

問題数：6問

第 1 問

a, b は実数であり，方程式

$$x^4 + (a+2)x^3 - (2a+2)x^2 + (b+1)x + a^3 = 0$$

が解 $x = 1 + i$ をもつとする。ただし， $i = \sqrt{-1}$ とする。このとき， a, b を求めよ。また，このときの方程式の他の解も求めよ。

第 2 問

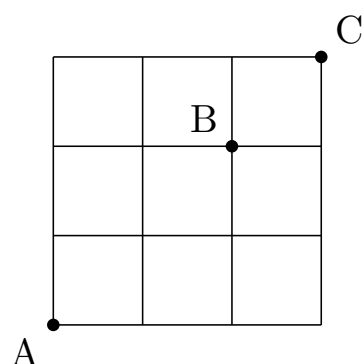
xy 平面上に、媒介変数 t により表示された曲線

$$C : x = e^t - e^{-t}, \quad y = e^{3t} + e^{-3t}$$

がある。

- (1) x の関数 y の増減と凹凸を調べ、曲線 C の概形を描け。
- (2) 曲線 C , x 軸, 2 直線 $x = \pm 1$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

第 3 問



上の図のような格子状の道路がある。左下の A 地点から出発し、サイコロを繰り返し振り、次の規則にしたがって進むものとする。1 の目が出たら右に 2 区画、2 の目が出たら右に 1 区画、3 の目が出たら上に 1 区画進み、その他の場合はそのまま動かない。ただし、右端で 1 または 2 の目が出たとき、あるいは上端で 3 の目が出たときは、動かない。また、右端の 1 区画手前で 1 の目が出たときは、右端まで進んで止まる。

n を 8 以上の自然数とする。A 地点から出発し、サイコロを n 回振るとき、ちょうど 6 回目に、B 地点以外の地点から進んで B 地点に止まり、 n 回目までに C 地点に到達する確率を求めよ。ただし、サイコロのどの目が出るのも、同様に確からしいものとする。

第 4 問

四面体 ABCD は各辺の長さが 1 の正四面体とする。

- (1) $\overrightarrow{AP} = l\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC} + n\overrightarrow{AD}$ で与えられる点 P に対し $|\overrightarrow{BP}| = |\overrightarrow{CP}| = |\overrightarrow{DP}|$ が成り立つならば, $l = m = n$ であることを示せ。また, このときの $|\overrightarrow{BP}|$ を l を用いて表せ。
- (2) A, B, C, D のいずれとも異なる空間内の点 P と点 Q を, 四面体 PBCD と四面体 QABC がともに正四面体になるようにとるとき, $\cos \angle PBQ$ の値を求めよ。

第 5 問

$a > b > 0$ とし, xy 平面の楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の第 1 象限の部分を E とする。ただし, 第 1 象限には x 軸と y 軸は含まれない。 E 上の点 P における E の接線と法線が y 軸と交わる点の y 座標をそれぞれ h と k とし, $L = h - k$ とおく。点 P が E 上を動くとき, L の最小値が存在するための a と b についての条件と, そのときの L の最小値を求めよ。

第 6 問

$f_1(x)$ は実数全体で定義された何回でも微分可能な関数とする。 $f_2(x), f_3(x), \dots$ を次のように順次定義する。 $n = 2, 3, \dots$ に対し

$$F_{n-1}(x) = \int_0^x f_{n-1}(t) dt$$

とおいて

$$f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t) F_{n-1}(t) dt$$

とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $n \geq 2$ のとき、すべての x に対して $f_n(x) \geq 0$ であることを示せ。
- (2) $n \geq 3$ のとき、すべての $x \geq 0$ に対して $f'_n(x) \geq 0$ であることを示せ。
- (3) $f'_4(1) = 0$ のとき、すべての $0 \leq x \leq 1$ に対して $f_1(x) = 0$ であることを示せ。