

入学試験過去問題

数 学

東北大学（理系）

対象年度：2001 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

第 1 問

a, b を正の数とする。2 つの曲線

$$y = x^3 + bx^2, \quad y = ax^2 + abx$$

によって囲まれる 2 つの部分の面積の和を S とする。

- (1) S を a と b で表せ。
- (2) $a + b = 1$ のとき, S を最小にする a, b の値と, そのときの S の値を求めよ。

第 2 問

関数 $f(x) = \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}$ ($x \neq 0$) について,

$$a = \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \quad b = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$$

とおく。

(1) a, b の値を求めよ。

(2) $-\frac{1}{2} \leq x$ の範囲で, 3 つの関数

$$\sqrt{1+2x}, \quad 1+ax, \quad 1+ax+bx^2$$

の大小関係を調べ, これらの関数のグラフを同一の xy 平面上に描け。

第 3 問

1 から 200 までの整数が 1 つずつ記入された 200 枚のカードの入った箱がある。この箱から 1 枚のカードを無作為に抜き出して、それに書かれた数が奇数であればその数を得点とし、偶数の場合は奇数になるまで 2 で割って得られる奇数を得点とする。例えば、抜き出したカードの数が 28 であれば、これを 2 で 2 回割って得られる 7 が得点となる。1 枚のカードを抜き出したときの得点の期待値を求めよ。

第 4 問

四面体 $OABC$ において、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおく。線分 OA , OB , OC , BC , CA , AB の中点をそれぞれ L , M , N , P , Q , R とし、 $\vec{p} = \overrightarrow{LP}$, $\vec{q} = \overrightarrow{MQ}$, $\vec{r} = \overrightarrow{NR}$ とおく。

- (1) 線分 LP , MQ , NR は 1 点で交わることを示せ。
- (2) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ を用いて表せ。
- (3) 直線 LP , MQ , NR が互いに直交するとする。 X を $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{LP}$ となる空間の点とすると、四面体 $XABC$ の体積および四面体 $OABC$ の体積を $|\vec{p}|$, $|\vec{q}|$, $|\vec{r}|$ を用いて表せ。

第 5 問

複素数 $z = x + yi$, $w = u + vi$ (ただし, x, y, u, v は実数) は $|z| = |w| = 1$ を満たし, $yv < 0$ とする。 $|1 + z + w| < 1$ となるための必要十分条件を x と u を用いて表せ。

第 6 問

- (1) n を正の整数とする。 $t \geq 0$ のとき、不等式 $e^t > \frac{t^n}{n!}$ が成り立つことを数学的帰納法で示せ。

- (2) 極限 $I_m = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x^m e^{-x} dx$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) を求めよ。